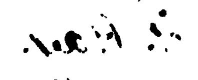
G. Hay.

# COURS D'ANALYSE

DE

# L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.





PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
rue du Jardinet, 12.

# COURS
# D'ANALYSE

DE

# L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

PAR M. STURM,
Membre de l'Institut,

PUBLIÉ D'APRÈS LE VOEU DE L'AUTEUR

PAR M. E. PROUHET,
Professeur de Mathématiques.

*TOME PREMIER.*

PARIS,

MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

QUAI DES AUGUSTINS, 55.

1857

# AVERTISSEMENT.

Vers la fin de sa trop courte carrière, M. Sturm, cédant aux instances de ses nombreux amis, s'était décidé à publier ses *Cours d'Analyse* et de *Mécanique*. Mais comme l'état de sa santé ne lui permettait pas de se livrer aux soins multipliés qu'exige l'impression d'un livre de science, surtout dans une première édition, il avait bien voulu accepter mes bons offices pour la révision du texte et la correction des épreuves. Élève de M. Sturm, honoré en toutes circonstances de ses précieux conseils et de son bienveillant appui, j'avais saisi avec empressement cette occasion de lui témoigner ma reconnaissance, lorsque sa mort vint interrompre l'entreprise à peine commencée, et me laissa seul chargé d'un travail que j'aurais été si heureux d'accomplir sous sa direction.

Je dois maintenant à la mémoire de M. Sturm d'entrer dans quelques détails sur la manière dont j'ai compris l'exécution de ses dernières volontés.

Le Cours d'Analyse, pour ne parler que de l'ouvrage dont je publie aujourd'hui le premier volume, est la reproduction des Leçons faites par l'auteur à l'École Polytechnique, et rédigées en premier lieu par quelques élèves de cette École. Ces rédactions rendaient assez fidèlement, dans leur ensemble, la

pensée de M. Sturm, et je les ai reproduites en grande partie; mais, par suite de la rapidité avec laquelle elles avaient été composées, il s'y était glissé de nombreuses fautes de calcul ou de langage, qu'il m'a fallu faire disparaître. A cet effet, je me suis servi des cahiers de M. Sturm, dans lesquels j'ai trouvé un programme très-détaillé de son Cours, et quelquefois des théories entièrement rédigées par lui; j'ai profité en outre des corrections ou additions qu'il avait indiquées en marge de quelques exemplaires des feuilles lithographiées. Enfin, conformément à l'intention clairement manifestée par M. Sturm, j'ai supprimé de nombreuses répétitions indispensables dans un cours oral, mais inutiles dans un livre où elles peuvent être suppléées par des renvois. J'aurai atteint le but de ce modeste travail, si l'on retrouve dans le texte que je publie les qualités qui avaient fait une place si remarquable à M. Sturm parmi les professeurs.

En terminant, je dois remercier mon ami M. Gros, professeur de mathématiques, qui a bien voulu revoir avec soin les épreuves de cet ouvrage. Je lui offre ici l'expression de ma reconnaissance.

E. PROUHET.

# TABLE DES MATIÈRES.



# CALCUL DIFFÉRENTIEL.

Pages.

## SEPTIÈME LEÇON.



## HUITIÈME LEÇON.



## NEUVIÈME LEÇON.



## DIXIÈME LEÇON.



## ONZIÈME LEÇON.



## DOUZIÈME LEÇON.

Pages.

## TREIZIÈME LEÇON.



## QUATORZIÈME LEÇON.



## QUINZIÈME LEÇON.



## SEIZIÈME LEÇON.

### APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DU CALCUL DIFFÉRENTIEL.



## DIX-SEPTIÈME LEÇON.



## DIX-HUITIÈME LEÇON.



## DIX-NEUVIÈME LEÇON.

# CALCUL INTÉGRAL.

Pages.

## VINGT-SEPTIÈME LEÇON.



## VINGT-HUITIÈME LEÇON.



## VINGT-NEUVIÈME LEÇON.



## TRENTIÈME LEÇON.



## TRENTE ET UNIÈME LEÇON.



## TRENTE-DEUXIÈME LEÇON.

Pages.

## TRENTE-TROISIÈME LEÇON.

### APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DU CALCUL INTÉGRAL.



## TRENTE-QUATRIÈME LEÇON.



## TRENTE-CINQUIÈME LEÇON.



## TRENTE-SIXIÈME LEÇON.



FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME PREMIER.

# NOTICE

SUR

# LA VIE ET LES TRAVAUX

## DE M. CH. STURM.

CHARLES STURM naquit à Genève, alors chef-lieu du département du Léman, le 6 vendémiaire an XII (29 septembre 1803). Sa famille, qui appartenait à la religion protestante, était originaire de Strasbourg et avait quitté cette ville vers 1760. Elle comptait probablement parmi ses ancêtres deux hommes célèbres au XVI[e] siècle, Jacques Sturm, président (*statt-meister*) de la république de Strasbourg, qui se distingua dans la lutte de cette ville contre Charles-Quint, et Jean Sturm, humaniste, diplomate, théologien, dont le nom se trouve mêlé à toutes les querelles littéraires, politiques et religieuses de son époque.

Le jeune Sturm montra de bonne heure des dispositions extraordinaires, et il obtint au collége de nombreux succès dans toutes les parties de ses études. Il apprit avec une égale facilité les langues anciennes et modernes, la littérature, l'histoire. On nous a même rapporté qu'à douze ans il composait des vers qui décelaient beaucoup d'imagination et de sensibilité. Mais à mesure qu'il avançait en âge, il donnait une préférence de plus en plus marquée aux études scientifiques.

M. Sturm quitta le collége en 1818 pour suivre les cours plus savants de l'Académie de Genève. Il y eut pour professeurs MM. J.-J. Schaub, le colonel (depuis général) Dufour et Simon Lhuilier. Ce dernier, géomètre éminent, avait pour son élève une vive affection et se plai-

sait à lui prédire un brillant avenir. Il eut le bonheur de vivre assez longtemps pour voir ses prédictions se réaliser.

En 1819, un grand malheur vint frapper M. Sturm et le mettre aux prises avec les nécessités de la vie. Son père mourut dans la force de l'âge, ne laissant aucune fortune à sa veuve et à quatre enfants, dont Charles était l'aîné. Pour venir au secours de sa mère qu'il aimait tendrement, M. Sturm, quoique bien jeune, se livra à l'enseignement et commença par donner des leçons particulières. En 1823, il entra comme précepteur dans la famille de Broglie, où il fut chargé de l'éducation du frère de madame de Broglie, fils de la célèbre madame de Staël. Il demeura quinze mois dans cette respectable famille, dont il eut beaucoup à se louer.

M. Sturm accompagna son élève à Paris, vers la fin de 1823. En route, il lia connaissance avec un bibliothécaire de Dijon qui conduisait son fils à l'Ecole Polytechnique. Ces messieurs étaient des lecteurs assidus du *Journal de Gergonne,* où M. Sturm avait déjà inséré quelques bons articles. Quand ils apprirent le nom de leur compagnon de voyage, ils lui firent beaucoup de compliments et de politesses. A vingt ans, de pareilles rencontres, premières joies d'une célébrité naissante, ont un charme tout particulier qui les fait compter parmi les plus grands bonheurs de la vie.

M. Sturm aimait à se rappeler cette époque. Il était alors pauvre et presque inconnu. Mais il avait la conscience de sa force, et son existence modeste était embellie par l'espérance, ce bien souvent préférable au but le plus ardemment poursuivi. « Je suis actuellement, écrivait-il à sa mère, en relation avec des hommes très-savants et très-distingués. Il faut tâcher de m'élever à peu près à leur niveau. »

Ce premier séjour à Paris fut de courte durée. M. Sturm y revint un an après avec son ami d'enfance, M. Daniel Colladon, aujourd'hui professeur à l'Académie

de Genève et physicien distingué. De 1825 à 1829, les deux amis vécurent ensemble, mettant en commun leurs travaux, leurs espérances, leurs joies et leurs peines. Le 11 juin 1827, une haute distinction venait récompenser leurs efforts : ils remportaient le grand prix de Mathématiques proposé par l'Académie pour le meilleur Mémoire sur la compression des liquides.

M. Sturm était venu à Paris avec une lettre de recommandation de M. Lhuilier pour M. Gerono. L'éminent professeur accueillit le jeune mathématicien avec une cordialité dont celui-ci lui a toujours gardé une profonde reconnaissance, et lui procura des relations utiles. MM. Arago, Ampère et Fourier suivaient avec intérêt les travaux de M. Sturm et de son ami. Je n'ai pas besoin de dire que les jeunes savants étaient obligés d'abandonner parfois la haute théorie pour des occupations moins relevées, mais plus lucratives. M. Arago, dont la prévoyante amitié embrassait tous les détails, ne laissait échapper aucune occasion de leur envoyer des élèves.

A cette époque, M. Fourier réunissait autour de lui quelques jeunes géomètres, dont la réputation commençait à se faire jour et qui ont tenu depuis ce qu'ils promettaient alors. L'illustre savant les initiait à ses travaux de prédilection et les entraînait dans la route où il avait fait de si importantes découvertes. M. Sturm subit l'heureuse influence de ce maître vénéré, dont il ne parlait jamais qu'avec émotion. Il dirigea ses recherches vers la théorie de la chaleur et l'analyse algébrique. C'est en étudiant les propriétés de certaines équations différentielles qui se présentent dans un grand nombre de questions de physique mathématique, qu'il trouva son fameux théorème. Cette découverte, publiée en 1829, fit sensation et plaça son auteur au rang des premiers géomètres.

M. Sturm accueillit avec joie la révolution de Juillet dans laquelle il crut voir l'avénement définitif d'une sage liberté. Cette révolution lui fut du moins favorable en

lui permettant d'entrer dans l'Instruction publique, dont sa qualité de protestant l'avait éloigné pendant la Restauration. La haute protection de M. Arago le fit nommer, à la fin de 1830, professeur de Mathématiques spéciales au collége Rollin.

C'est de cette époque que date son amitié avec M. Liouville, amitié qui a duré jusqu'à sa mort.

Le 4 décembre 1834, l'Académie des Sciences l'honora du grand prix de Mathématiques, qui devait, aux termes du programme, être décerné à l'auteur de la découverte la plus importante publiée dans les trois dernières années. Le Mémoire couronné, déposé au Secrétariat le 30 septembre 1833, était relatif à la théorie des équations.

En 1836, M. Sturm fut nommé membre de l'Académie des Scieuces, en remplacement de M. Ampère, par 46 voix sur 52 votants.

Entré à l'École Polytechnique en 1838, comme répétiteur d'Analyse, M. Sturm devenait deux ans plus tard professeur à cette école. Dans la même année (1840), présenté en première ligne par le Conseil académique et par la Faculté, il occupait la chaire de Mécanique laissée vacante par la mort de Poisson.

M. Sturm était, en outre, officier de la Légion d'honneur (1837), membre de la Société Philomathique, des Académies de Berlin (1835) et de Saint-Pétersbourg (1836), de la Société Royale de Londres (1840). Cette dernière lui avait décerné la médaille de Copley pour ses travaux sur les équations.

M. Sturm se montrait digne de tous ces honneurs par son zèle à remplir ses diverses fonctions. Doué d'une constitution naturellement forte, il pouvait compter sur une longue carrière et de nouveaux succès. Malheureusement, vers 1851, sa santé subit une altération profonde par suite d'une trop forte application à des recherches difficiles, et il fut obligé de se faire remplacer à la Sorbonne

et à l'Ecole Polytechnique. Il reprit ses Cours à la fin de 1852, mais il ne se rétablit jamais complétement. Malgré les soins de sa famille qui retardèrent, mais ne purent arrêter les progrès du mal, il succomba le 18 décembre 1855, à l'âge de cinquante et un ans.

M. Sturm n'était pas seulement un homme de talent, c'était aussi un homme de cœur, bon pour sa famille, bon pour ses amis, dont le nombre était grand. « J'ai beaucoup d'amis, » disait-il avec un naïf orgueil, et cette parole, qui chez tout autre aurait passé pour une exagération, était rigoureusement vraie. A ceux que j'ai déjà cités, j'ajouterai, sans prétendre à une énumération complète, MM. Lejeune-Dirichlet, Ostrogradsky, Brassine, Cassanac, Catalan. M. Faurie, d'abord élève, devenu ensuite l'ami intime de M. Sturm, mérite une mention spéciale pour le dévouement dont il a fait preuve dans les circonstances les plus pénibles.

Dans sa prospérité, M. Sturm n'oubliait pas les jours difficiles et le généreux appui qu'il avait reçu de MM. Ampère, Fourier, Arago. Il se plaisait à venir en aide aux jeunes gens qui débutaient dans la carrière des sciences et il savait les obliger avec une délicatesse admirable.

M. Sturm se taisait volontiers avec les personnes qu'il ne connaissait pas; mais quand sa timidité naturelle était vaincue, il révélait tout le charme d'un esprit fin et original. Il était passionné pour la musique des grands maîtres, et nous tenons de lui qu'à une époque où ses ressources étaient bien faibles, il s'imposait des privations afin de pouvoir entendre les chefs-d'œuvre de Rossini et de Meyerbeer.

Comme professeur, M. Sturm se distinguait par la clarté et la rigueur. On lui doit beaucoup de démonstrations ingénieuses qui, répandues par ses élèves, ont ensuite passé dans des livres dont les auteurs ont presque toujours *oublié* de le citer. Mais il était riche, point avare et ne réclamait jamais. « En ai-je assez perdu, disait-il

en riant, de ces petits objets! et combien peu m'ont été rapportés par d'honnêtes ouvriers! A la longue, cependant, le total peut faire, comme on dit, une perte *conséquente.* »

Les qualités de M. Sturm étaient bien appréciées par la jeunesse intelligente qui suivait ses leçons. « On admirait, dit l'un de ses élèves (*), (et j'ajouterai : l'on aimait) cet homme supérieur s'étudiant à s'effacer, pénétrant dans l'amphithéâtre avec une timidité excessive, osant à peine regarder son auditoire. Aussi le plus religieux silence régnait-il pendant ses leçons, et on pouvait dire de lui comme d'Andrieux, qu'il se faisait entendre à force de se faire écouter, tant est grande l'influence du génie! »

Enfin, pour achever de faire connaître l'homme éminent que nous venons de perdre, nous citerons encore les paroles touchantes prononcées sur sa tombe par M. Liouville, le jeudi 20 décembre 1855.

« MESSIEURS,

» Le géomètre supérieur, l'homme excellent dont nous accompagnons les restes mortels, a été pour moi, pendant vingt-cinq ans, un ami dévoué; et par la bonté même de cette amitié, comme par les traits d'un caractère naïf uni à tant de profondeur, il me rappelait le maître vénéré qui a guidé mes premiers pas dans la carrière des mathématiques, l'illustre Ampère.

» M. Sturm était à mes yeux un second Ampère : candide comme lui, insouciant comme lui de la fortune et des vanités du monde; tous deux joignant à l'esprit d'invention une instruction encyclopédique; négligés ou même dédaignés par les habiles qui cherchent le pouvoir, mais exerçant une haute influence sur la jeunesse des écoles, que le génie frappe; possédant enfin, sans l'avoir désiré, sans le savoir peut-être, une immense popularité.

(*) M. Regray-Belmy, ancien élève de l'École Polytechnique. Voir le *Siècle* du 30 décembre 1855.

» Prenez au hasard un des candidats à notre Ecole Polytechnique, et demandez-lui ce que c'est que le théorème de M. Sturm : vous verrez s'il répondra! La question pourtant n'a jamais été exigée par aucun programme : elle est entrée d'elle-même dans l'enseignement, elle s'est imposée comme autrefois la théorie des couples.

» Par cette découverte capitale, M. Sturm a tout à la fois simplifié et perfectionné, en les enrichissant de résultats nouveaux, les éléments d'algèbre.

» Ce magnifique travail a surgi comme un corollaire d'importantes recherches sur la mécanique analytique et sur la mécanique céleste, que notre confrère a données, par extrait seulement, dans le *Bulletin des Sciences* de M. Férussac.

» Deux beaux Mémoires sur la discussion des équations différentielles et à différences partielles, propres aux grands problèmes de la physique mathématique, ont été du moins publiés en entier grâce à mon insistance. « La » postérité impartiale les placera à côté des plus beaux Mé» moires de Lagrange » (*). Voilà ce que j'ai dit et imprimé il y a vingt ans, et ce que je répète sans craindre qu'aujourd'hui personne vienne me reprocher d'être trop hardi.

» M. Sturm a été le collaborateur de M. Colladon dans des expériences sur la compressibilité des liquides que l'Académie a honorées d'un de ses grands prix.

» Nous lui devons un travail curieux sur la vision, un Mémoire sur l'optique, d'intéressantes recherches sur la mécanique, et en particulier un théorème remarquable sur la variation que la force vive éprouve lors d'un changement brusque dans les liaisons d'un système en mou-

(*) M. Liouville s'exprimait ainsi dans un Mémoire lu à l'Académie des Sciences le 14 décembre 1836, et cependant M. Sturm était son concurrent pour la place vacante par le décès d'Ampère. Un pareil fait, assez rare dans l'histoire des luttes académiques, porte avec lui son éloge.

vement. Quelques articles sur des points de détail ornent nos recueils scientifiques.

» Mais, bien qu'il y ait de quoi suffire à plus d'une réputation dans cet ensemble de découvertes solidement fondées et que le temps respectera, les amis de notre confrère savent que M. Sturm est loin d'être là tout entier, même comme géomètre. Puissent les manuscrits si précieux que quelques-uns de nous ont entrevus se retrouver intacts entre les mains de sa famille! En les publiant, elle ne déparera pas les chefs-d'œuvre que nous avons tant admirés.

» L'originalité dans les idées, et, je le répète, la solidité dans l'exécution, assurent à M. Sturm une place à part. Il a eu de plus le bonheur de rencontrer une de ces vérités destinées à traverser les siècles sans changer de forme, et en gardant le nom de l'inventeur, comme le cylindre et la sphère d'Archimède.

» Et la mort est venue nous l'enlever dans la fleur de l'âge! Il est allé rejoindre Abel et Gallois, Göpel, Eisenstein, Jacobi.

» Ah! cher ami, ce n'est pas toi qu'il faut plaindre. Echappée aux angoisses de cette vie terrestre, ton âme immortelle et pure habite en paix dans le sein de Dieu, et ton nom vivra autant que la science.

» Adieu, Sturm, adieu. »

## LISTE BIBLIOGRAPHIQUE DES TRAVAUX DE M. STURM.

### ANNALES DE MATHÉMATIQUES DE GERGONNE.

1. Tome XIII (1822-23), page 289. — *Extension du problème des courbes de poursuite.*

Solution d'une question proposée par le rédacteur.

2. *Ibid.*, p. 314. — *Déterminer en fonction des côtés d'un quadrilatère inscrit au cercle : 1° l'angle de deux côtés opposés; 2° l'angle des diagonales.*

3. Tome XIV (1823-24), p. 13. — *Étant donnés trois points et un plan, trouver dans ce plan un point tel, que la somme de ses distances aux trois points donnés soit un minimum.*

M. Sturm, sans résoudre le problème par des formules explicites, démontre, à l'aide de considérations empruntées à la mécanique, plusieurs propriétés du point cherché. Il généralise ensuite le problème.

4. *Ibid.*, p. 17. — *Démonstration analytique de deux théorèmes sur la lemniscate.*

Démonstration de deux théorèmes énoncés par M. Talbot, concernant l'excès fini de l'asymptote d'une hyperbole équilatère sur le quart de cette courbe.

5. *Ibid.*, p. 108. — *Recherches analytiques sur une classe de problèmes de géométrie dépendants de la théorie des maxima et des minima.*

Maximum et minimum d'une fonction des distances d'un point variable à d'autres points dont les uns sont fixes, les autres assujettis à se trouver sur des courbes ou sur des surfaces données.

6. *Ibid.*, p. 225. — *Démonstration de deux théorèmes sur les transversales.*

7. *Ibid.*, p. 286. — *Lieu des points desquels abaissant des perpendiculaires sur les côtés d'un triangle et joignant les pieds de ces perpendiculaires, on obtienne un triangle d'aire constante.*

8. *Ibid.*, p. 302. — *Recherche de la surface courbe de chacun des points de laquelle menant des droites à trois points fixes, ces droites déterminent sur un plan fixe les sommets d'un triangle dont l'aire est constante.*

9. *Ibid.*, p. 381. — *Courbure d'un fil flexible et inextensible dont les extrémités sont fixes et dont tous les points sont attirés et repoussés par un centre fixe, suivant une fonction déterminée de la distance.*

10. *Ibid.*, p. 390. — *La distance entre les centres des*

*cercles inscrit et circonscrit à un triangle est moyenne proportionnelle entre le rayon du circonscrit et l'excès de ce rayon sur le diamètre de l'inscrit.*

11. Tome XV (1824-25), p. 100. — *Démonstration de quatre théorèmes sur l'hyperbole.*

12. *Ibid.*, p. 205. — *Recherches sur les caustiques.*

Cas où la ligne réfléchissante ou séparatrice de deux milieux est une circonférence. Propriétés des ovales de Descartes.

Ce Mémoire est le seul morceau de Géométrie que nous ait laissé M. Sturm et montre ce qu'il aurait pu faire dans ce genre s'il l'avait cultivé.

13. *Ibid.*, p. 250. — *Théorèmes sur les polygones réguliers.*

Démonstration et généralisation d'un théorème de Lhuilier.

14. *Ibid.*, p. 309. — *Recherches analytiques sur les polygones rectilignes plans ou gauches.*

15. *Ibid.*, p. 238. — *Recherches d'analyse sur les caustiques planes.*

Relations entre les longueurs des rayons incidents et réfractés correspondants, prises, l'une et l'autre, depuis le point d'incidence jusqu'à ceux où ces rayons touchent leurs caustiques respectives. Rectification des caustiques planes.

16. Tome XVI, p. 265. — *Mémoire sur les lignes du second ordre.* (Première partie.)

Propriétés des coniques qui ont quatre points communs. Pôles et polaires. Théorèmes de Pascal et de Brianchon.

17. Tome XVII, p. 177. — *Mémoire sur les lignes du second ordre.* (Deuxième partie.)

On y trouve les deux théorèmes suivants qui sont une généralisation de celui de Desargues :

*Quand deux coniques sont circonscrites à un quadri-*

*latère, si l'on tire une transversale quelconque qui rencontre cette courbe en quatre points et deux côtés opposés du quadrilatère en deux autres points, ces six points seront en involution.*

*Quand trois coniques sont circonscrites à un même quadrilatère, une transversale quelconque les rencontre en six points qui sont en involution.*

BULLETIN DES SCIENCES DE FÉRUSSAC.

M. Sturm a rédigé en 1829 et 1830 la partie mathématique de ce *Bulletin*.

18. Tome XI (1829), p. 419. — *Analyse d'un Mémoire sur la résolution des équations numériques.* (Lu à l'Académie des Sciences le 13 mai 1829.)

Ce Mémoire contient le fameux théorème de M. Sturm. La démonstration en a paru pour la première fois dans l'*Algèbre* de MM. Choquet et Mayer (1re édition, 1832). M. Sturm a donné dans le même ouvrage une démonstration plus simple que celle de M. Cauchy, du théorème que *toute équation algébrique a une racine*.

Voici comment M. Sturm parle de ses obligations en vers M. Fourier : « L'ouvrage qui doit renfermer l'ensemble de ses travaux sur l'analyse algébrique n'a pas encore été publié. Une partie du manuscrit qui contient ces précieuses recherches a été communiquée à quelques personnes. M. Fourier a bien voulu m'en accorder la lecture, et j'ai pu l'étudier à loisir. Je déclare donc que j'ai eu pleine connaissance de ceux des travaux inédits de M. Fourier qui se rapportent à la résolution des équations, et je saisis cette occasion de lui témoigner la reconnaissance dont ses bontés m'ont pénétré. C'est en m'appuyant sur les principes qu'il a posés et en imitant ses démonstrations que j'ai trouvé les nouveaux théorèmes que je vais énoncer. »

19. *Ibid.*, p. 422. — *Extrait d'un Mémoire présenté à l'Académie des Sciences* (1er juin 1829).

Extension du theorème de Fourier et de celui de Descartes aux équations de la forme

$$Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + \ldots = 0,$$

dans lesquelles $\alpha$, $\beta$, $\gamma$,... sont des nombres réels quelconques.

A la fin de cet extrait, M. Sturm énonce quelques théorèmes relatifs au mouvement de la chaleur dans une sphère ou dans une barre. Ils devaient faire partie d'un Mémoire qui paraît n'avoir jamais été rédigé. M. Liouville les a démontrés très-simplement dans son Cours du Collége de France (2e semestre 1836). Ce Cours, consacré à l'analyse des travaux de M. Sturm, nous a été très-utile pour la composition de cette Notice.

20. *Ibid.*, p. 273. — *Note présentée à l'Académie* (8 juin 1829).

Réalité des racines de certaines équations transcendantes. Sur les coefficients des séries qui représentent une fonction arbitraire entre des limites données.

Cette Note a été refondue dans d'autres travaux de l'auteur.

21. Tome XII (1829), p. 314. — *Extrait d'un Mémoire sur l'intégration d'un système d'équations différentielles linéaires.* (Présenté à l'Académie des Sciences le 27 juillet 1829.)

Etude des racines des équations qui se présentent dans l'intégration d'un système d'équations linéaires. Nombre de ces racines comprises entre deux limites données.

Cet extrait, fort étendu, peut tenir lieu du Mémoire lui-même. Dans une note, l'auteur avertit que les conclusions d'un Mémoire précédent (*voir* plus haut n° 19) s'étendent à un grand nombre d'équations transcendantes.

JOURNAL DE M. LIOUVILLE.

22. Tome I (1836), p. 106. — *Mémoire sur les équa-*

*tions différentielles linéaires du second ordre.* (Lu à l'Académie des Sciences le 30 septembre 1833.)

Très-beau Mémoire dans lequel les propriétés des fonctions qui satisfont à une équation différentielle sont étudiées sur cette équation même.

Une analyse de ce Mémoire a paru dans le journal l'*Institut* du 9 novembre 1833. Le même journal, dans le numéro du 30 novembre, contient une Note de M. Sturm, qui complète sa théorie.

**23.** *Ibid.*, p. 278. — *Démonstration d'un théorème de M. Cauchy.* (En commun avec M. Liouville.)

Théorème sur le nombre des points-racines renfermés dans un contour donné.

**24.** *Ibid.*, p. 290. — *Autres démonstrations du même théorème.*

**25.** *Ibid.*, p. 373. — *Sur une classe d'équations à différentielles partielles.*

Equations de la forme

$$g\frac{du}{dt} = \frac{dk\frac{du}{dx}}{dx} - lu.$$

Complément du Mémoire n° **22**.

(*Voir* aussi *Comptes rendus*, t. IV, p. 35.)

**26.** Tome II, p. 220. — *Extrait d'un Mémoire sur le développement des fonctions en séries, etc.* (En commun avec M. Liouville.)

(*Voir* aussi *Comptes rendus*, t. IV, p. 675.)

**27.** Tome III, 357. *Mémoire sur l'optique.*

Surfaces caustiques formées par des rayons lumineux émanés d'un point et qui éprouvent une suite de réfractions ou de réflexions.

**28.** Tome VI, p. 315. — *Note à l'occasion d'un article de M. Delaunay sur la surface de révolution dont la courbure moyenne est constante.*

29. Tome VII, p. 132. — *Note à l'occasion d'un article de M. Gascheau sur l'application du théorème de M. Sturm aux transformées des équations binômes.*

30. *Ibid.*, p. 345. — *Note sur un théorème de M. Chasles.*

Démonstration nouvelle de ce théorème : Un canal infiniment petit dont les arêtes curvilignes sont des trajectoires orthogonales aux surfaces de niveau relatives à un corps quelconque, intercepte sur les surfaces de niveau des éléments pour lesquels l'attraction exercée par le corps a la même valeur.

31. *Ibid.*, p. 356. — *Démonstration d'un théorème d'algèbre de M. Sylvester.*

Ce beau théorème complète celui de M. Sturm en donnant la manière dont les différents restes se composent avec les facteurs simples de l'équation proposée.

COMPTES RENDUS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

32. Tome IV, p. 720. — *Note sur un théorème de M. Cauchy relatif aux racines des équations simultanées.* (En commun avec M. Liouville.)

33. Tome V, p. 867. — *Rapport sur un Mémoire de M. Bravais concernant les lignes formées dans un plan par des points dont les coordonnées sont des nombres entiers.*

34. Tome VII, p. 1143. — *Rapport sur deux Mémoires de M. Blanchet relatifs à la propagation et à la polarisation du mouvement dans un milieu élastique.*

35. Tome VIII, p. 788. — *Note relative à des remarques critiques sur les travaux de M. Liouville contenues dans un Mémoire de M. Libri.*

36. Tome XIII, p. 1046. — *Mémoire sur quelques propositions de mécanique rationnelle.*

« Si les liaisons d'un système de points matériels en mouvement sont changées dans un intervalle de temps

très-court, la somme des forces vives acquises avant cet intervalle surpassera celle qui aura lieu immédiatement après d'une quantité égale à la somme des forces vives correspondantes aux vitesses perdues dans le passage du premier état du système au second. »

37. Tome XX, p. 554, 761 et 1228. — *Mémoire sur la théorie de la vision.*

L'auteur explique comment la vision peut être distincte à diverses distances. Les rayons émanés d'un point, après avoir traversé les milieux inégalement réfringents qui constituent l'œil, forment une surface caustique. Pour que la vision soit distincte, il suffit qu'une partie de cette caustique, qui se réduit presque à une ligne mathématique et dans laquelle les rayons sont plus condensés que partout ailleurs, vienne rencontrer la rétine.

38. Tome XXVI, p. 658. — *Note sur l'intégration des équations générales de la dynamique.*

Théorèmes d'Hamilton et de Jacobi.

39. Tome XXVIII, p. 66. — *Rapport sur un Mémoire de M. L. Wantzel ayant pour titre :* Théorie des diamètres rectilignes des courbes quelconques.

### MÉMOIRES DES SAVANTS ÉTRANGERS.

40. Tome V (1834), p. 267. — *Mémoire sur la compression des liquides.* (En commun avec M. Colladon.)

Ce Mémoire a remporté le grand Prix de Mathématiques en 1827. Il a aussi été publié dans les *Annales de Chimie et de Physique,* t. XXII, p. 113.

41. Tome VI (1835), p. 271. — *Mémoire sur la résolution des équations numériques.* (*Voir* plus haut n° 18.)

### NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES.

42. Tome X (1851), p. 419. — *Sur le mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe.*

### COURS DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

43. *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique ;* 2 vol. in-8, 1857.

44. *Cours de Mécanique de l'École Polytechnique et de la Faculté des Sciences*; 2 vol. in-8 (*sous presse*).

MANUSCRITS.

45. Un Mémoire très-étendu sur la *communication de la chaleur dans une suite de vases.*

46. Un Mémoire *sur les lignes du second ordre,* dont les dix premiers paragraphes seulement ont paru dans les *Annales de Gergonne.* (*Voir* plus haut n$^{os}$ 16 et 17.)

Ces deux Mémoires sont en état d'être imprimés, et M. Liouville a bien voulu se charger de leur publication.

Les autres papiers de M. Sturm contiennent des calculs relatifs à des Mémoires déjà publiés, à des extraits de ses lectures, et enfin à des recherches particulières sur les équations. La plupart de ces calculs n'étant accompagnés d'aucun discours, il est très-difficile de suivre la pensée de l'auteur. On donnera des extraits de ce qu'une patiente investigation y fera découvrir d'intéressant.

E. Prouhet.

# COURS
# D'ANALYSE.

## CALCUL DIFFÉRENTIEL.

### PREMIÈRE LEÇON.

**Définitions préliminaires. — Méthode des limites. — Origine et but du calcul différentiel. — Fonction dérivée. — Différentielle.**

#### DÉFINITIONS PRÉLIMINAIRES.

1. Avant d'exposer le but et les principes du calcul différentiel, il est nécessaire d'établir quelques notions préliminaires.

On appelle *variable* une quantité qui prend successivement différentes valeurs, et *constante* celle qui conserve une valeur fixe dans le cours d'un même calcul. La nature de la question dont on s'occupe indique quelles sont les quantités variables et les constantes.

2. Quand les valeurs successives d'une quantité variable dépendent suivant une certaine loi de celles que prend une autre variable, la première est dite une *fonction* de la seconde. On peut affirmer que deux quantités qui varient ensemble sont fonctions l'une de l'autre, lorsqu'on sait qu'à chaque valeur de l'une d'elles correspond une valeur déterminée de l'autre, quand même la relation qui existe entre elles ne serait pas connue ni même susceptible d'être exprimée analytiquement.

3. On nomme *variable indépendante* celle à laquelle on donne des valeurs arbitraires, et *fonction* la variable qui prend des valeurs correspondantes. Ainsi l'aire d'un

cercle, d'une sphère, est fonction de son rayon ; le temps de l'oscillation d'un pendule est fonction de sa longueur.

Une quantité peut être fonction de plusieurs variables indépendantes ; par exemple, le volume d'un cylindre droit à base circulaire est fonction de sa hauteur et du rayon de sa base.

Les quantités variables sont ordinairement représentées par les dernières lettres de l'alphabet $x$, $y$, $z$, etc. ; les constantes le sont par les premières $a$, $b$, $c$, etc.

Quand on veut indiquer différentes fonctions d'une variable $x$ sans en spécifier la nature, on emploie les symboles $f(x)$, $\varphi(x)$, $F(x)$, etc. Si l'on donne à $x$ une valeur particulière $a$, le résultat de la substitution de $a$ à la place de $x$ dans $f(x)$ est indiqué par $f(a)$.

On représente les fonctions de plusieurs variables par les notations

$$f(x, y, z), \quad \varphi(x, y, z), \quad F(x, y, z), \ldots$$

On indique par $f(a, b, c)$, $\varphi(a, b, c)$, $F(a, b, c)$ les résultats que l'on obtient lorsqu'on met $a$, $b$, $c$ à la place de $x$, $y$, $z$ dans ces fonctions.

4. La relation qui existe entre une fonction d'une seule variable et cette variable peut être représentée géométriquement.

Il suffit pour cela de considérer $x$ comme une abscisse variable et $y$ comme l'ordonnée correspondante de la courbe plane définie par l'équation

$$y = f(x).$$

Ordinairement cette courbe est continue, c'est-à-dire que, pour des valeurs de $x$ qui varient par degrés insensibles, l'ordonnée varie aussi par degrés insensibles ; $y$ est alors une *fonction continue* de $x$.

On peut de même représenter par une surface une fonction de deux variables indépendantes ; mais une fonction de trois, de quatre, ou d'un plus grand nombre de variables indépendantes, n'est pas susceptible d'une représentation géométrique.

5. Une fonction est dite *explicite* quand elle est exprimée immédiatement au moyen de la variable ou des variables dont elle dépend, de sorte qu'on peut obtenir sa valeur en effectuant sur ces variables certaines opérations indiquées avec précision. Ainsi

$$y = x + \sqrt{x^2 - a^2}, \quad y = a^x,$$

sont des fonctions explicites de $x$.

On nomme fonctions *implicites* celles qui sont liées aux variables dont elles dépendent par des équations non résolues ou par des conditions quelconques qui ne sont pas exprimées; telle est $y$ dans l'équation

$$y^2 - 2xy + 2x^2 - a^2 = 0.$$

La fonction deviendra explicite si l'on tire sa valeur de l'équation, et l'on aura

$$y = x \pm \sqrt{a^2 - x^2}.$$

LIMITES.

6. Quand les valeurs successives d'une quantité variable approchent indéfiniment d'une quantité fixe et déterminée, *de manière à n'en différer qu'aussi peu qu'on voudra,* cette quantité fixe est dite la *limite* des valeurs de la variable. Citons quelques exemples.

La surface d'un cercle est la limite vers laquelle tendent les aires d'une suite de polygones réguliers inscrits quand le nombre des côtés devient de plus en plus grand. En effet, on démontre en Géométrie que l'aire d'un polygone régulier inscrit dans un cercle peut différer de l'aire de ce cercle d'une quantité aussi petite que l'on voudra, pourvu que le nombre des côtés soit suffisamment grand. Il faut bien remarquer qu'il n'est pas nécessaire pour cela de démontrer que l'aire du polygone régulier inscrit va constamment en augmentant avec le nombre de ses côtés.

De même, si l'on considère un arc et son sinus, le rapport $\frac{\sin x}{x}$, toujours plus petit que l'unité, peut en diffé-

rer aussi peu qu'on le voudra, pourvu que l'on donne à cet arc des valeurs suffisamment petites. Donc la limite de $\frac{\sin x}{x}$ est l'unité, quand $x$ décroît.

On remarquera bien encore ici qu'il n'est pas nécessaire de démontrer, et même on ne le démontre pas ordinairement, que le rapport $\frac{\sin x}{x}$ va en augmentant continuellement quand $x$, plus petit qu'un quadrant, diminue indéfiniment.

7. Les fonctions qui se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$ pour une certaine valeur de la variable ont souvent des limites. Nous en avons un exemple dans le rapport $\frac{\sin x}{x}$, qui devient $\frac{0}{0}$ pour $x = 0$, et qui a pour limite l'unité. De même l'expression

$$y = 2a - \frac{x^3 - a^3}{x^2 - a^2},$$

se présente pour $x = a$ sous la forme $\frac{0}{0}$. Toutefois, si l'on donne à $x$ des valeurs différentes de $a$, mais qui s'en approchent successivement, les valeurs de $y$ sont déterminées et égales d'ailleurs aux valeurs de l'expression

$$2a - \frac{x^2 + ax + a^2}{x + a}.$$

Or, à mesure que $x$ s'approche de plus en plus de $a$, cette dernière expression diffère de moins en moins de

$$2a - \frac{3a}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{a}{2}.$$

La limite des valeurs de $y$ est donc $\frac{a}{2}$.

8. Une quantité variable peut s'approcher indéfiniment d'une limite en restant toujours plus petite ou plus

grande que cette limite; mais il peut se faire aussi qu'une quantité variable devienne alternativement plus grande et plus petite que la limite vers laquelle elle tend, en oscillant, pour ainsi dire, de part et d'autre.

Ainsi le rapport $\frac{\sin x}{x}$ tend vers zéro quand $x$ croît indéfiniment. En même temps, toutes les fois que $x$ devient égale à un multiple de la demi-circonférence, $\frac{\sin x}{x}$ devient o, et change de signe.

9. *Si deux quantités qui varient simultanément restent constamment égales entre elles dans tous les états de grandeur par lesquels elles passent, et si l'on sait que l'une d'elles tend vers une limite, il est évident que l'autre tend aussi vers la même limite ou vers une limite égale à celle-là.* C'est là le principe de la *méthode des limites* dont on fait un si grand usage dans toutes les parties des mathématiques.

Ainsi, veut-on prouver que le cercle a pour mesure le produit de sa circonférence par la moitié de son rayon; en désignant par $a$, $p$, $r$ l'aire, le périmètre et l'apothème d'un polygone régulier inscrit dans le cercle, on a

$$a = p \times \frac{1}{2} r;$$

or $a$ et $p \times \frac{1}{2} r$ sont des quantités qui varient avec le nombre des côtés, mais qui restent toujours égales entre elles; leurs limites sont donc égales. Si A, C, R désignent l'aire, la circonférence et le rayon du cercle, A est la limite de $a$, C celle de $p$ et R celle de $r$ : donc

$$A = C \times \frac{1}{2} R.$$

10. Lorsqu'une quantité variable prend des valeurs de plus en plus petites ou tend vers zéro, on dit qu'elle devient *infiniment petite*. Ainsi la différence entre l'aire d'un cercle et celle d'un polygone inscrit peut être rendue

infiniment petite, en augmentant le nombre des côtés. La fraction $\frac{x}{x^2 - 2x + 3}$ devient infiniment petite quand $x$ prend des valeurs de plus en plus grandes.

Une quantité infiniment petite ou un infiniment petit n'est donc pas une quantité déterminée qui ait une valeur actuelle assignable : c'est au contraire une quantité essentiellement variable qui tend vers zéro.

11. Quand une variable prend des valeurs de plus en plus grandes de manière à surpasser toute grandeur donnée, on dit qu'elle devient *infinie* ou *infiniment grande*, et on la représente alors par le signe $\infty$ ou $\frac{K}{0}$. Ainsi la fonction

$$y = a + \frac{a^2}{x - a}$$

devient infinie pour $x = a$.

Pour des valeurs de $x$ très-peu différentes de $a$, mais plus grandes que $a$, les valeurs correspondantes de $y$ sont positives, tandis que, pour des valeurs de $x$ plus petites que $a$, les valeurs de $y$ sont négatives. L'infini est donc positif ou négatif, suivant les cas.

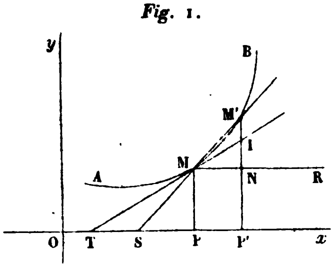
### ORIGINE ET BUT DU CALCUL DIFFÉRENTIEL. — FONCTION DÉRIVÉE.

12. On a été conduit à la découverte du calcul différentiel en cherchant une méthode générale pour mener des tangentes aux courbes planes représentées par des équations.

Concevons deux variables $x$ et $y$ liées entre elles par une relation quelconque, de manière que l'une soit fonction de l'autre. Considérons ces variables comme les coordonnées d'un point rapporté à des axes rectangulaires tracés dans un plan, et construisons la courbe AMB dont l'équation est $y = f(x)$. Supposons cette courbe réelle et continue dans une certaine étendue, et proposons-nous de mener la tangente au point M dont les coordonnées

sont $x$ et $y$. On définit ordinairement la tangente comme la limite vers laquelle tend une sécante, lorsque cette sécante tournant autour d'un de ses points d'intersection, un second point d'intersection s'approche indéfiniment du premier. Soit donc M' un second point de la courbe ayant pour coordonnées $x+h, y+k$; considérons la sécante M'MS, et la tangente MT qui en est la limite. On a dans le triangle M'MN

*Fig.* 1.




$$\text{tang M'MN} = \frac{\text{M'N}}{\text{MN}} = \frac{k}{h}.$$

Donc $$\text{tang IMR} = \lim \text{tang M'MN} = \lim \frac{k}{h},$$

quand $h$ diminue indéfiniment jusqu'à zéro.

Donc, si l'on cherche la limite du rapport des accroissements simultanés $k$ et $h$ des variables $y$ et $x$, liés entre eux par l'équation

$$y + k = f(x + h),$$

quand $h$ diminue indéfiniment, on aura la tangente trigonométrique de l'angle que fait avec l'axe des $x$ la droite qui touche la courbe au point M.

13. *Le calcul différentiel a pour but de déterminer, pour chaque fonction, la limite du rapport de l'accroissement de la fonction à celui de la variable, quand celui-ci diminue jusqu'à zéro.* Cette limite, qui dépend de la valeur attribuée à $x$, mais nullement de $h$, est appelée la fonction *dérivée* de la fonction proposée. On la représente par $y'$ ou par $f'(x)$.

Nous allons la déterminer pour quelques fonctions simples.

1°. $$y = x^m,$$

$m$ étant entier et positif. Si nous changeons $x$ en $x + h$, $y$ devient $y + k$, et l'on a $y + k = (x + h)^m$, d'où $k = (x + h)^m - x^m$, ou

$$k = mx^{m-1}h + \frac{m(m-1)}{1.2}x^{m-2}h^2 + \ldots + h^m,$$

d'où $\frac{k}{h} = mx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}x^{m-2}h + \ldots + h^{m-1}$.

Le rapport $\frac{k}{h}$ se compose de deux parties, l'une indépendante de $h$, et l'autre qui contient $h$ en facteur commun, de sorte que si $h$ décroît indéfiniment jusqu'à zéro, cette seconde partie pourra devenir aussi petite que l'on voudra; donc

$$\lim \frac{k}{h} = mx^{m-1}.$$

Ainsi, dans ce cas,

$$y' = mx^{m-1}.$$

On peut encore obtenir cette dérivée sans faire usage de la formule du binôme. Posons

$$x + h = X;$$

on a alors $$k = X^m - x^m;$$

et si l'on remarque que $h = X - x$, on en déduit

$$\frac{k}{h} = \frac{X^m - x^m}{X - x} = X^{m-1} + X^{m-2}x + \ldots + x^{m-1}.$$

Quand $h$ diminue jusqu'à zéro, X s'approche indéfiniment de $x$, et l'on a bien encore $\lim \frac{k}{k} = mx^{m-1}$.

2°. Soit une fonction entière

$$y = ax^m + bx^n + cx^p + \ldots.$$

Changeons $x$ en $x + h$, $y$ devient $y + k$, et l'on a

$$y + k = a(x + h)^m + b(x + h)^n + c(x + h)^p + \ldots,$$

d'où $$k = a[(x + h)^m - x^m] + b[(x + h)^n - x^n] + c[(x + h)^p - x^p] + \ldots,$$

et, par suite,

$$k = a\left[mx^{m-1}h + \frac{m(m-1)}{1.2}x^{m-2}h^2 + \ldots\right]$$
$$+ b\left[nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}h^2 + \ldots\right]$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Divisant par $h$ et faisant ensuite $h = 0$, on a

$$\lim \frac{k}{h} \text{ ou } y' = max^{m-1} + nbx^{n-1} + pcx^{p-1} + \ldots.$$

On pourrait aussi obtenir cette dérivée de la même manière que la précédente, sans recourir à la formule du binôme.

3°. $$y = \frac{1}{x^m} = x^{-m},$$

$m$ étant entier et positif; on a

$$y + k = \frac{1}{(x+h)^m},$$

et $$k = \frac{1}{(x+h)^m} - \frac{1}{x^m} = \frac{x^m - (x+h)^m}{x^m(x+h)^m},$$

d'où, développant et divisant par $h$,

$$\frac{k}{h} = \frac{-mx^{m-1} - \frac{m(m-1)}{1.2}x^{m-2}h\ldots}{x^m(x+h)^m},$$

et enfin, passant à la limite, on a

$$\lim \frac{k}{h} = -\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}} = -\frac{m}{x^{m+1}};$$

donc $$y' = -\frac{m}{x^{m+1}} = -mx^{-m-1}:$$

d'où l'on voit que la dérivée de $x^m$, quand $m$ est entier, s'obtient toujours de la même manière, quel que soit le signe de $m$.

4°. $$y = \sqrt{x^2 - a^2};$$

on a $$k = \sqrt{(x+h)^2 - a^2} - \sqrt{x^2 - a^2},$$

et, par conséquent,

$$\frac{k}{h} = \frac{\sqrt{(x+h)^2 - a^2} - \sqrt{x^2 - a^2}}{h};$$

or, si l'on fait $h=0$, cette expression prend la forme $\frac{0}{0}$.

Pour faire disparaître l'indétermination, on emploie un procédé bien connu : on multiplie les deux termes de la fraction par la somme des radicaux dont le numérateur est la différence ; et l'on a

$$\frac{k}{h}=\frac{\left[\sqrt{(x+h)^2-a^2}-\sqrt{x^2-a^2}\right]\left[\sqrt{(x+h)^2-a^2}+\sqrt{x^2-a^2}\right]}{h\left[\sqrt{(x+h)^2-a^2}+\sqrt{x^2-a^2}\right]}$$

$$=\frac{(x+h)^2-x^2}{h\left[\sqrt{(x+h)^2-a^2}+\sqrt{x^2-a^2}\right]},$$

ou
$$\frac{k}{h}=\frac{2x+h}{\sqrt{(x+h)^2-a^2}+\sqrt{x^2-a^2}};$$

enfin
$$\lim\frac{k}{h}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}},$$

donc
$$y'=\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}.$$

Nous avons trouvé d'une manière assez prompte et facile les dérivées des fonctions précédentes ; mais il est certaines fonctions telles que $\sqrt[3]{x^2-a^2}$, etc., que nous ne pourrions traiter de cette manière ; il nous faut donc une méthode plus générale : c'est là le but du calcul différentiel.

DIFFÉRENTIELLE.

**14.** Soit
$$y=f(x);$$
donnons à $x$ un accroissement quelconque $h$ positif ou négatif. Soit $k$ l'accroissement correspondant de $y$ ; on a
$$y+k=f(x+h):$$
puisque la limite de $\frac{k}{h}$ est $y'$, on doit avoir, quand $h$ n'est pas nul,
$$\frac{k}{h}=y'+\alpha,$$
$\alpha$ étant une quantité, fonction de $x$ et de $h$, qui doit ten-

dre vers zéro en même temps que $h$. De là résulte

$$k = y'h + \alpha h.$$

Ainsi l'accroissement $k$ de la fonction se compose de deux parties distinctes ; la première $y'h$ est le produit de l'accroissement de la variable indépendante $x$ par la dérivée de la fonction. On l'appelle la *différentielle* de la variable $y$, et on la désigne par $dy$, de sorte que

$$dy = y'h \quad \text{ou} \quad f'(x)h.$$

La seconde partie est le produit de $h$ par une quantité $\alpha$ qui s'annule avec $h$ : on ne s'en occupe pas.

De la définition de la différentielle, il résulte que la différentielle de la variable indépendante n'est autre chose que l'accroissement $h$. En effet, considérons la fonction

$$y = x;$$

on a $$y + k = x + h;$$

par suite, $$k = h,$$

et enfin $$\frac{k}{h} = 1.$$

Ainsi, pour cette fonction de $x$ qui est la plus simple de toutes, la dérivée est 1 ; par suite, la différentielle

$$dy \quad \text{ou} \quad dx = 1 \times h = h.$$

Par conséquent, la formule générale

$$dy = y'h,$$

peut s'écrire $$dy = y'dx :$$

d'où l'on déduit $$y' = \frac{dy}{dx}.$$

Ainsi *la dérivée d'une fonction est le quotient de la différentielle de la fonction par la différentielle de la variable*. C'est pourquoi on appelle aussi la dérivée *rapport différentiel* ou *coefficient différentiel*.

On dit encore que le coefficient différentiel est la dernière raison (ou le dernier rapport) des accroissements simultanés des variables. Mais les accroissements, étant nuls à la limite, n'ont pas à proprement parler de rapport, et ce que l'on appelle ainsi n'est que la limite dont le rapport de ces quantités approche indéfiniment.

15. La différentielle est susceptible d'une représentation géométrique. En effet, soit AMB (*fig.* 1, page 7) la courbe représentée par l'équation

$$y=f(x).$$

On a
$$\text{tang IMN} = \lim \frac{k}{h} = y'.$$

Or
$$\text{IN} = \text{MN tang IMN}.$$

Donc
$$\text{IN} = hy' = dy:$$

ainsi IN représente la différentielle, si d'ailleurs

$$\text{MN} = h = dx.$$

On voit par là que $dx$ et $dy$ sont les accroissements correspondants de $x$ et de $y$ quand on passe du point de contact M situé sur la courbe à un point quelconque I de la tangente, tandis que $k$ ou M'N est l'accroissement de l'ordonnée de la courbe correspondant au même accroissement $h = dx$ de l'abscisse.

16. Toutefois, quoique IN et M'N soient en général bien différents, leur rapport tend vers l'unité; en effet, de $\frac{k}{h} = y + \alpha$, on tire

$$k = (y' + \alpha)h;$$

d'ailleurs
$$dy = y'h,$$

donc
$$\frac{k}{dy} = \frac{y' + \alpha}{y'} = 1 + \frac{\alpha}{y'},$$

et, si $y'$ n'est pas zéro,

$$\lim \frac{k}{dy} = 1:$$

ainsi le *rapport de l'accroissement de la fonction à la différentielle de cette fonction tend vers l'unité*, pourvu que la dérivée ne soit pas nulle.

C'est pourquoi la différentielle est appelée l'accroissement infiniment petit de la fonction, mais ce n'est pas toujours exact, puisque $\alpha$ n'étant pas rigoureusement nul (si ce n'est pour $y = x$), $k$ n'est pas précisément égal à $y'h$.

---

# DEUXIÈME LEÇON.

**Propriétés générales des fonctions dérivées. — Différentielle d'une fonction de fonction. — Différentielle d'une somme, d'un produit, de fonctions d'une seule variable indépendante.**

---

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES FONCTIONS DÉRIVÉES.

**17.** De la relation

$$k = (y' + \alpha)h,$$

trouvée dans la dernière leçon, on peut déduire plusieurs conséquences remarquables.

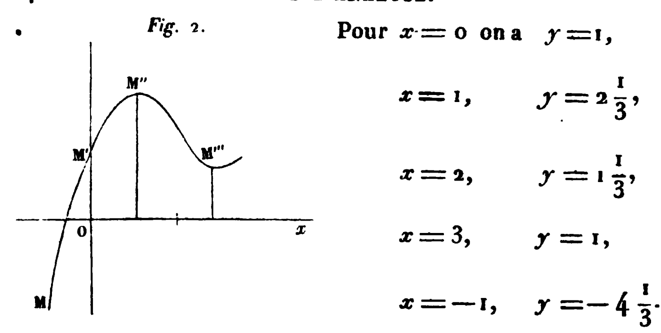
Attribuons à $x$ une valeur déterminée, $y'$ aura aussi une valeur déterminée; si l'on donne ensuite à $x$ un accroissement suffisamment petit, le signe de $y' + \alpha$ sera le même que celui de $y'$, puisque $\alpha$ peut devenir aussi petit que l'on voudra; le signe de $k$ sera donc celui de $y'h$, et comme nous supposons $h$ positif, $k$ aura le signe de $y'$. Donc si $y'$ est positive, $k$ l'est aussi, c'est-à-dire que la fonction va en augmentant, et si $y'$ est négative, la fonction va au contraire en diminuant. Ainsi *une fonction croît ou décroît à partir d'une valeur déterminée de* x, *suivant que sa dérivée est, pour cette valeur, positive ou négative.*

De ce qui précède, il résulte que si la dérivée d'une fonction reste constamment positive depuis la valeur $a$ jusqu'à la valeur $b$ de $x$, la fonction croîtra continuellement dans le même intervalle; ce sera le contraire si la dérivée est négative.

Prenons pour exemple la fonction

$$y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1.$$

Construisons la courbe représentée par cette équation.




Pour $x = 0$ on a $y = 1$,

$x = 1$, $y = 2\frac{1}{3}$,

$x = 2$, $y = 1\frac{1}{3}$,

$x = 3$, $y = 1$,

$x = -1$, $y = -4\frac{1}{3}$.

En construisant ces différents points, on reconnaît que la courbe présente à peu près la forme $MM'M''M'''$.

Mais si l'on veut savoir quand l'ordonnée va en croissant ou en décroissant, on prendra la dérivée de $y$. On aura

$$y' = x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3).$$

On voit alors que si l'on fait croître $x$ de 0 à 1, $y'$ est positive; l'ordonnée ira donc en augmentant depuis le point $M'$ jusqu'au point $M''$. Pour le point $M''$, dont l'abscisse est $x = 1$, on a

$$y' = 0,$$

c'est-à-dire que la tangente en ce point est parallèle à l'axe des $x$. Si l'on fait croître ensuite $x$ depuis 1 jusqu'à 3, $y'$ devient négative; l'ordonnée va donc en diminuant depuis le point $M''$ jusqu'au point $M'''$; et comme $y' = 0$ pour $x = 3$, la tangente en ce dernier point est encore parallèle à l'axe des $x$.

Enfin si l'on donne à $x$ des valeurs croissantes à partir de 3, $y'$ est constamment positive; l'ordonnée de la courbe va donc toujours en augmentant à partir du point $M'''$. On voit de même que si l'on donne à $x$ une valeur négative quelconque, $y'$ est positive, et que par conséquent pour des valeurs négatives de $x$ et croissantes, les valeurs de $y$ correspondantes vont aussi en augmentant. Il faut bien remarquer qu'une quantité négative augmente quand sa valeur absolue diminue.

**18.** Reprenons la formule

$$k = (y' + \alpha) h;$$

on peut en déduire que *si la dérivée d'une fonction est nulle pour toutes les valeurs de* x *comprises entre* a *et* b, *cette fonction a une valeur constante dans cet intervalle.*

Nous supposerons $a < b$. Puisque $\lim \frac{k}{h} = 0$ par hypothèse, on aura, pour une valeur quelconque de $x$ comprise entre $a$ et $b$, $\frac{k}{h} < \varepsilon$ en valeur absolue, pourvu que $h$ soit suffisamment petit; $\varepsilon$ étant d'ailleurs une quantité déterminée qu'on peut prendre aussi petite que l'on voudra. On déduit de là

$$k < \varepsilon h.$$

Considérons actuellement deux valeurs quelconques de $x$, $x_1$ et $x_2$, comprises entre $a$ et $b$; je dis que les valeurs $y_1$ et $y_2$ correspondantes seront égales. En effet, donnons à $x$ une suite de valeurs comprises entre $x_1$ et $x_2$, croissant d'ailleurs par degrés égaux ou inégaux, mais assez petits pour que l'on ait, pour une quelconque de ces valeurs, $k < \varepsilon h$, $k$ étant pris en valeur absolue. Nous aurons ainsi une suite d'inégalités de la même forme; et si nous les ajoutons, il en résultera que la somme des accroissements successifs de la fonction $y$ pris tous positivement sera plus petite que la somme des produits $\varepsilon h$, c'est-à-dire plus petite que le produit de la quantité $\varepsilon$ par la somme des accroissements de la variable $x$, savoir $x_2 - x_1$. Donc à fortiori la somme des accroissements successifs de la fonction pris avec leurs signes, ou $y_2 - y_1$, est plus petite que $\varepsilon\ (x_2 - x_1)$, donc

$$y_2 - y_1 < \varepsilon (x_2 - x_1);$$

et comme $\varepsilon$ peut être rendu aussi petit que l'on voudra,

il s'ensuit que $y_2 - y_1$ est plus petit que toute quantité donnée, c'est-à-dire

$$y_2 - y_1 = 0, \quad \text{ou} \quad y_2 = y_1.$$

La fonction $y$ conserve donc la même valeur pour toutes les valeurs de $x$ comprises dans l'intervalle considéré. Ce qu'il fallait démontrer.

19. Le rapprochement des deux propositions précédentes conduit encore à cette conclusion, que *si une fonction est croissante dans un certain intervalle, sa dérivée ne peut devenir négative dans cet intervalle;* mais elle peut passer une ou plusieurs fois par zéro. De même, *si une fonction est décroissante, sa dérivée sera négative,* mais elle pourra s'annuler pour une ou plusieurs valeurs particulières.

20. Si la dérivée d'une fonction était constamment infinie, $x$ serait une constante, car si

$$\lim \frac{k}{h} = \infty,$$

on a

$$\lim \frac{h}{k} = 0,$$

et en répétant les mêmes raisonnements, on en déduit que deux valeurs quelconques de $x$, $x_1$ et $x_2$, sont égales.

21. Nous avons désigné jusqu'ici les accroissements simultanés des variables $x$ et $y$ par les lettres $h$ et $k$; mais comme on aura bientôt à considérer un plus grand nombre de variables, il devient nécessaire d'employer une notation qui rappelle toujours à quelle variable se rapporte chaque accroissement. On se sert à cet effet de la caractéristique $\Delta$. Ainsi, quand on considère plusieurs variables $x$, $y$, $z$, $u$ liées entre elles par des équations de manière qu'une seule soit indépendante, on représente les accroissements simultanés de ces variables par $\Delta x$, $\Delta y$, $\Delta z$, $\Delta u$. Si l'on prend $x$ pour variable indépen-

dante, les rapports

$$\frac{\Delta y}{\Delta x},\ \frac{\Delta z}{\Delta x},\ \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

auront pour limites respectives

$$\frac{dy}{dx},\ \frac{dz}{dx},\ \frac{du}{dx},$$

quand $\Delta x$ décroîtra indéfiniment.

22. *Si deux fonctions sont égales pour toutes les valeurs de la variable indépendante, leurs différentielles ou leurs dérivées sont égales.*

En effet, soient $u$ et $v$ deux fonctions égales de $x$. Donnons à $x$ un accroissement $\Delta x$; soient $\Delta u$ et $\Delta v$ les accroissements correspondants de $u$ et de $v$; on aura

$$u + \Delta u = v + \Delta v;$$

et comme $u = v$, on en déduit

$$\Delta u = \Delta v,$$

d'où

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Cette équation ayant lieu quelque petit que soit $\Delta x$, aura lieu encore à la limite; or la limite de $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ est la dérivée de $u$ ou $\frac{du}{dx}$: de même la limite de $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ est $\frac{dv}{dx}$; donc

$$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dx} \quad \text{ou} \quad du = dv.$$

Le même théorème subsiste quand les deux fonctions proposées ont une différence constante; car, soit

$$u = v + c;$$

en changeant $x$ en $x + \Delta x$, on a

$$u + \Delta u = v + \Delta v + c,$$

et comme $u = v + c$, on en déduit encore

$$\Delta u = \Delta v, \quad \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\Delta v}{\Delta x};$$

par suite,

$$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dx},$$

ou enfin $$du = dv,$$

c'est-à-dire que *deux fonctions qui ne diffèrent que par une constante ont la même différentielle.*

23. Réciproquement, *si les différentielles de deux fonctions sont égales entre elles dans un certain intervalle, ces fonctions auront dans cet intervalle une différence constante.*

En effet, soit $y$ la différence $u - v$; et supposons que l'on ait

$$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dx}.$$

De l'équation $$y = u - v$$

on tire $$y + \Delta y = u + \Delta u - v - \Delta v,$$

ou $$\Delta y = \Delta u - \Delta v,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} - \frac{\Delta v}{\Delta x},$$

ou enfin, en passant à la limite,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx} = 0.$$

Ainsi $\frac{dy}{dx}$ est nulle, et par suite $y$ est une constante. Ce qu'il fallait démontrer.

## DES FONCTIONS DE FONCTIONS.

24. Quand on a

$$u = \varphi(y),$$

$y$ étant elle-même une fonction de $x$, $f(x)$, on dit que $u$ est une *fonction de fonction* de $x$.

Pour obtenir la dérivée de $u$ par rapport à $x$, on pourrait remplacer $y$ par $f(x)$ dans $\varphi(y)$, ce qui donnerait

$$u = \varphi[f(x)],$$

mais il est possible d'éviter cette substitution. En effet, on a l'équation identique

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta u},$$

dans laquelle $\Delta x$ étant l'accroissement de la variable indépendante, $\Delta y$ et $\Delta u$ sont les accroissements correspondants de $u$ et de $y$. Si l'on suppose que $x$ diminue indéfiniment, l'égalité ayant toujours lieu, aura encore lieu à la limite. Or $\lim \frac{\Delta u}{\Delta x}$, c'est la dérivée de $u$ par rapport à $x$ ou $\frac{du}{dx}$, $\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$ ; quant à la limite de $\frac{\Delta u}{\Delta y}$, c'est $\varphi'(y)$ ou la dérivée de $\varphi(y)$ dans laquelle $y$ serait considérée comme variable indépendante, car cette limite ne dépend pas de la relation qui existe entre $y$ et $x$, et il suffit, pour qu'on l'obtienne, que $\Delta y$ décroisse jusqu'à o. Donc

$$\frac{du}{dx} = \varphi'(y) f'(x). \quad (1)$$

Ainsi *la dérivée d'une fonction de fonction est égale au produit des dérivées de ces fonctions.*

25. On peut écrire l'équation (1) sous une autre forme; en effet, si l'on y remplace $f'(x)$ par $\frac{dy}{dx}$, on aura

$$\frac{du}{dx} = \varphi'(y) \frac{dy}{dx};$$

et, par suite,

$$du = \varphi'(y)\, dy.$$

Sous cette forme on voit que la différentielle de $\varphi(y)$, $y$ étant égale à $f(x)$, s'obtient en prenant la différentielle de $\varphi(y)$ comme si $y$ était la variable indépendante; car dans cette hypothèse la différentielle de $\varphi(y)$ est $\varphi'(y)\, dy$; seulement il faudra avoir soin dans l'application de remplacer $dy$ par sa valeur $f'(x)\, dx$.

26. Enfin, on peut mettre encore l'équation (1) sous une autre forme, en remarquant que

$$\varphi'(y) = \frac{du}{dy} \quad \text{et} \quad f'(x) = \frac{dy}{dx},$$

on a

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Il ne faut pas croire que cette équation soit une identité; car $dy$ n'a pas la même signification dans $\frac{du}{dy}$ et dans $\frac{dy}{dx}$: dans la première expression, $dy$ désigne l'accroissement infiniment petit de $y$ regardée comme variable indépendante; tandis que dans l'autre, $dy$ est la différentielle de $y$ considérée comme fonction de $x$.

Soit comme exemple

$$u = y^m, \quad y = \sqrt{x^2 - a^2}:$$

d'où

$$u = \left(\sqrt{x^2 - a^2}\right)^m = (x^2 - a^2)^{\frac{m}{2}}.$$

On aura $d.y^m = my^{m-1}\,dy$, et, puisque $y = \sqrt{x^2 - a^2}$,

$$dy = \frac{a}{\sqrt{x^2 - a^2}}\,dx;$$

donc

$$du = m\left(\sqrt{x^2 - a^2}\right)^{m-1} \frac{xdx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = m\left(\sqrt{x^2 - a^2}\right)^{m-2} xdx.$$

27. Si l'on a

$$v = \psi(u), \quad u = \varphi(y), \quad y = f(x),$$

on a, d'après ce qui a été démontré précédemment,

$$dv = \psi'(u)\,du, \quad du = \varphi'(y)\,dy, \quad dy = f'(x)\,dx,$$

donc

$$dv = \psi'(u)\,\varphi'(y) f'(x)\,dx,$$

ou, en divisant par $dx$,

$$\frac{dv}{dx} = \psi'(u)\,\varphi'(y) f'(x),$$

de sorte que la *dérivée de la fonction* v *est égale au produit des dérivées des trois fonctions dont elle est formée*. Cette règle, comme on le voit facilement, s'applique à un nombre quelconque de fonctions.

### DIFFÉRENTIELLE D'UNE SOMME.

28. Soit

$$y = u + v - z;$$

$u$, $v$, $z$ étant des fonctions de $x$. Changeons $x$ en $x + \Delta x$,

nous aurons

$$y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - z - \Delta z,$$

et comme $$y = u + v - z,$$

on a $$\Delta y = \Delta u + \Delta v - \Delta z,$$

ou $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta z}{\Delta x};$$

passant à la limite

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dz}{dx},$$

ou enfin

$$dy \quad \text{ou} \quad d(u + v - z) = du + dv - dz.$$

Ainsi *la différentielle d'une somme de fonctions est égale à la somme des différentielles de ces fonctions.*

Si l'une des quantités $u$, $v$, $z$ est constante, elle disparaît dans la différentielle; c'est d'ailleurs ce qui résulte de la proposition démontrée plus haut, que les différentielles de deux fonctions sont égales, quand ces fonctions ont une différence constante.

### DIFFÉRENTIELLE D'UN PRODUIT.

29. Soit à différentier

$$y = au,$$

$u$ étant une fonction de $x$ et $a$ une constante: changeons $x$ en $x + \Delta x$; il vient

$$y + \Delta y = a(u + \Delta u),$$

et comme $$y = au,$$

on a $$\Delta y = a\Delta u, \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = a\frac{\Delta u}{\Delta x},$$

et à la limite $$\frac{dy}{du} = a\frac{du}{dx},$$

ou enfin

$$dy = d(au) = adu.$$

Ainsi *la différentielle d'une fonction multipliée par une constante s'obtient en multipliant par cette constante la différentielle de la fonction.*

30. Soit encore

$$y = uv,$$

on en tire $\quad y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v),$

ou, effectuant le produit,

$$y + \Delta y = uv + v\Delta u + u\Delta v + \Delta u \Delta v;$$

et comme $y = uv$, on a

$$\Delta y = v\Delta u + u\Delta v + \Delta u\Delta v,$$

ou

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = v\frac{\Delta u}{\Delta x} + u\frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v.$$

A la limite, $\frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v$ devient nul, puisque $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ a une limite en général finie, et que $\Delta v$ devient nul; donc

$$\frac{dy}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx},$$

ou enfin

$$dy = d(uv) = vdu + udv.$$

C'est-à-dire que *la différentielle d'un produit de deux fonctions s'obtient en multipliant chaque fonction par la différentielle de l'autre, et ajoutant les résultats.*

31. Soit maintenant

$$y = uvz,$$

on a $\quad d(uvz) = vzdu + ud(vz), \quad d(vz) = zdv + vdz;$

donc

$$d(uvz) = vzdu + uzdv + uvdz.$$

On voit que *la différentielle du produit de trois fonctions s'obtient en multipliant la différentielle de chaque fonction par le produit des autres fonctions, et ajoutant les résultats.*

Cette règle est générale. Ainsi l'on aura

$$d(uvz\ldots t) = vz\ldots tdu + uz\ldots tdv + uv\ldots tdz + \ldots + uv\ldots dt$$

ou, en divisant par $uvz\ldots t$,

$$\frac{d(uvz\ldots t)}{uvz\ldots t} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dz}{z} + \ldots + \frac{dt}{t}.$$

On démontrera cette formule, soit directement, soit en faisant voir que si elle est vraie pour un certain nombre de fonctions, elle aura encore lieu pour une fonction de plus.

---

# TROISIÈME LEÇON.

**Différentielle d'un quotient, d'une puissance. — Différentielle d'une expression imaginaire. — Applications diverses. — Règles pour la différentiation des fonctions composées.**

## DIFFÉRENTIELLE D'UN QUOTIENT.

**32.** La différentielle d'un quotient peut se déduire facilement de la différentielle d'un produit. En effet, soit

$$y = \frac{u}{v},$$

on en tire

$$yv = u,$$

et, par suite,

$$v\,dy + y\,dv = du.$$

On remplace $y$ par sa valeur $\frac{u}{v}$ et l'on obtient

$$v\,dy + \frac{u}{v}\,dv = du;$$

d'où l'on tire

$$dy \text{ ou } d\frac{u}{v} = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$$

Ainsi *la différentielle d'un quotient est égale au dénominateur multiplié par la différentielle du numérateur, moins le numérateur multiplié par la différentielle du dénominateur : le tout divisé par le carré du dénominateur.*

On peut encore arriver à ce résultat par une méthode plus directe. En effet, on a

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v}$$

ou

$$\Delta y = \frac{v\,\Delta u - u\,\Delta v}{v(v + \Delta v)},$$

et, par conséquent,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)};$$

passant à la limite, $\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$,

ou enfin $dy$ ou $d\frac{u}{v} = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$.

On peut remarquer que si le numérateur $u$ était constant, la différentielle se réduirait à $-\frac{u\,dv}{v^2}$.

DIFFÉRENTIELLE D'UNE PUISSANCE.

33. Soit $y = u^m$, $m$ étant un nombre entier et positif; nous avons vu que

$$d(uvz\ldots t) = uvz\ldots t\,du + uz\ldots t\,dv + \ldots + uvz\ldots dt.$$

Supposons que ces facteurs au nombre de $m$ deviennent tous égaux; on aura

$$d.u^m = mu^{m-1}\,du.$$

Ce résultat est aussi une conséquence immédiate de la règle pour différentier les fonctions de fonctions. On sait que si l'on a

$$y = \varphi(u) \quad \text{et} \quad u = f(x),$$

on aura $dy = \varphi'(u)\,du$;

donc, puisque $d.x^m = mx^{m-1}$,

on aura aussi $d.u^m = mu^{m-1}\,du$.

Voici enfin une troisième méthode, plus directe que les précédentes. Donnons à $x$ un accroissement quelconque et soit U ce que devient $u$; nous aurons

$$y + \Delta y = U^m,$$

et, à cause de $y = u^m$,

$$\Delta y = U^m - u^m = (U - u)(U^{m-1} + U^{m-2}u + \ldots + u^{m-1})$$

ou $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x}(U^{m-1} + U^{m-2}u + \ldots + u^{m-1})$.

Si l'on passe à la limite, U se confondant alors avec $u$, on a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \times mu^{m-1} \quad \text{ou} \quad dy = mu^{m-1}\,du$$

34. Supposons actuellement que l'exposant $m$ devienne

égal à une fraction positive $\frac{p}{q}$; on aura

$$y = u^{\frac{p}{q}}, \quad \text{d'où} \quad y^q = u^p.$$

Comme $p$ et $q$ sont entiers et positifs, nous pouvons, en prenant la différentielle des deux membres, appliquer la règle précédente, ce qui nous donne

$$qy^{q-1}\,dy = pu^{p-1}\,du$$

ou

$$qy^q\,dy = pu^{p-1}y\,du.$$

Mais

$$y^q = u^p \quad \text{et} \quad y = u^{\frac{p}{q}};$$

donc

$$dy = \frac{p}{q}\,\frac{u^{\frac{p}{q}}}{u}\,du,$$

ou enfin

$$d.u^{\frac{p}{q}} = \frac{p}{q}\,u^{\frac{p}{q}-1}\,du.$$

En remplaçant $\frac{p}{q}$ par $m$, nous retrouvons la formule

$$d.u^m = mu^{m-1}\,du.$$

35. Enfin, supposons que $m = -n$, $n$ étant d'ailleurs un nombre entier ou fractionnaire; on a dans ce cas

$$y = u^{-n} \quad \text{ou} \quad y = \frac{1}{u^n};$$

par suite,

$$dy = -\frac{d.u^n}{u^{2n}} = -\frac{nu^{n-1}}{u^{2n}},$$

ou enfin

$$d.u^{-n} = -nu^{-n-1}\,du,$$

ce qui donne encore, en remplaçant $-n$ par $m$,

$$d.u^m = mu^{m-1}\,du.$$

Ainsi cette formule est vraie, que l'exposant $m$ soit positif ou négatif, entier ou fractionnaire.

36. Cette règle sert à différentier les radicaux.

Ainsi,
$$d\sqrt[n]{u} = d.u^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\,u^{\frac{1}{n}-1}\,du = \frac{du}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}.$$

Dans le cas particulier où $n=2$, on a

$$d\sqrt{u}=\frac{du}{2\sqrt{u}}.$$

DIFFÉRENTIELLE D'UNE EXPRESSION IMAGINAIRE.

37. On sait que les expressions imaginaires résultant du calcul algébrique peuvent toujours se réduire à la forme

$$y=u+v\sqrt{-1}.$$

Si, comme en Algèbre, $\sqrt{-1}$ est assimilée à une constante, on aura, par le changement de $x$ en $x+\Delta x$,

$$y+\Delta y=u+\Delta u+(v+\Delta v)\sqrt{-1},$$

et comme $$y=u+v\sqrt{-1},$$

on aura $$\Delta y=\Delta u+\Delta v\sqrt{-1};$$

d'où $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x}\sqrt{-1},$$

et à la limite, $$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}\sqrt{-1},$$

ou enfin

$$dy \quad \text{ou} \quad d(u+v\sqrt{-1})=du+dv\sqrt{-1}.$$

Ainsi la différentielle d'une expression imaginaire s'obtient comme celle d'une somme, pourvu toutefois que l'on considère $\sqrt{-1}$ comme une constante.

APPLICATIONS.

38. Les règles précédentes suffisent pour différentier toutes les fonctions algébriques explicites.

1°. Soit d'abord $y=a+b\sqrt{x}-\frac{c}{x}$.

Pour différentier cette fonction, on la met sous la forme

$$y=a+bx^{\frac{1}{2}}-cx^{-1},$$

et l'on obtient

$$dy=\frac{1}{2}bx^{-\frac{1}{2}}dx+cx^{-2}dx=\frac{bdx}{2\sqrt{x}}+\frac{cdx}{x^2};$$

d'où l'on tire $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{b}{2\sqrt{x}} + \dfrac{c}{x^2}.$

2°. $$y = a + \frac{b}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{c}{x\sqrt[3]{x}} + \frac{e}{x^2}$$

ou $\qquad y = a + bx^{-\frac{2}{3}} - cx^{-\frac{4}{3}} + ex^{-2}.$

Différentiant, on a

$$dy = \left(-\frac{2}{3}bx^{-\frac{5}{3}} + \frac{4}{3}cx^{-\frac{7}{3}} - 2ex^{-3}\right)dx$$

$$= \left(-\frac{2b}{3x\sqrt[3]{x^2}} + \frac{4c}{3x^2\sqrt[3]{x}} - \frac{2e}{x^3}\right)dx,$$

d'où enfin, $\quad \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2b}{3x\sqrt[3]{x^2}} + \dfrac{4c}{3x^2\sqrt[3]{x}} - \dfrac{2e}{x^3}.$

3°. $\qquad y = (a + bx^n)^m.$

Posons $\qquad a + bx^n = u;$

on a $\qquad y = u^m,$

par suite, $\qquad dy = mu^{m-1}du.$

Or $\qquad du = nbx^{n-1}dx;$

donc $\qquad dy = mnb(a + bx^n)^{m-1}x^{n-1}dx.$

Voici encore quelques exemples, que je me dispenserai de développer.

4°. $y = x^2(a^2 + x^2)\sqrt{a^2 - x^2}, \qquad dy = \dfrac{2a^4 + a^2x^2 - 5x^4}{\sqrt{a^2 - x^2}}xdx.$

5°. $y = \sqrt{\dfrac{x^3}{a - x}}, \qquad dy = \dfrac{(3a - 2x)\sqrt{x}\,dx}{2\sqrt{(a - x)^3}}.$

6°. $y = f(a + x), \qquad dy = f'(a + x)\,dx.$

7°. $y = f(a + bx^2), \qquad dy = 2f'(a + bx^2)\,bx\,dx.$

8°. $y = f\left(\dfrac{a}{x}\right), \qquad dy = -af'\left(\dfrac{a}{x}\right)\dfrac{dx}{x^2}.$

9°. $$y = \frac{1}{x^2}f\left(\frac{x + a}{b - x}\right),$$

$$dy = -\frac{2}{x^3}f\left(\frac{a + x}{b - x}\right)dx + \frac{(a + b)f'\left(\dfrac{a + x}{b - x}\right)}{x^2(b - x)^2}dx.$$

39. Nous allons montrer maintenant comment le calcul différentiel s'applique à la détermination de courbes jouissant de propriétés données.

1°. *Trouver une courbe telle, que la sous-normale* NP *ait pour chaque point une longueur constante* a.

On aura, en supposant les coordonnées rectangulaires,

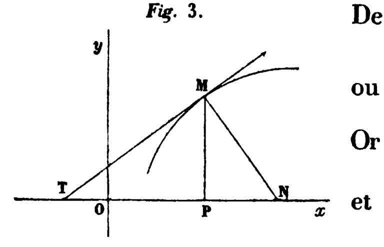
$$NP = MP \times \text{tang } PMN,$$

Mais $\quad MP = y, \quad \text{tang } PMN = \text{tang } MTN = \frac{dy}{dx};$

donc $$NP = y\frac{dy}{dx}.$$

Il faudra donc poser $\quad \frac{y\,dy}{dx} = a.$

*Fig.* 3.




De là on tire

$$y\,dy = a\,dx,$$

ou

$$2y\,dy = 2a\,dx.$$

Or

$$2y\,dy = d(y^2)$$

et

$$2a\,dx = d(2ax);$$

donc $$d(y^2) = d(2ax).$$

Mais on sait que deux fonctions qui ont la même différentielle ne peuvent différer que par une constante : donc, en appelant $c$ une constante arbitraire, on a pour l'équation du lieu

$$y^2 = 2ax + c.$$

Cette équation représente toutes les paraboles qui ont le même paramètre $2a$, et pour axe commun l'axe des $x$.

2°. *Trouver une courbe dont la sous-normale soit une puissance donnée de l'abscisse.*

On aura alors

$$\frac{y\,dy}{dx} = x^m, \quad d.\frac{y^2}{2} = d.\frac{x^{m+1}}{m+1},$$

d'où

$$y^2 = \frac{2}{m+1}x^{m+1} + c.$$

3°. *Trouver une courbe dont la sous-tangente* PT *soit en raison inverse de l'ordonnée.*

Cette courbe a pour équation différentielle

$$\frac{y\,dx}{dy}=\frac{a^2}{y},$$

puisque l'on a $\text{PT}=\text{MP}\cot\text{MTP}=\frac{y\,dx}{dy}$.

On tire de cette équation $dx=\frac{a^2dy}{y^2}$.

Or $$\frac{a^2}{y^2}=-d.\frac{a^2}{y};$$

donc $$x=-\frac{a^2}{y}+c,$$

ou $$xy-cy=-a^2.$$

Ainsi le lieu est une hyperbole équilatère dont une asymptote est l'axe des $x$ et l'autre asymptote est une parallèle à l'axe des $y$.

4°. Si l'on cherche *la courbe dont la normale* MN *est constante,* il faudra poser

$$y^2+\frac{y^2dy^2}{dx^2}=a^2;$$

d'où $$\frac{ydy}{dx}=\sqrt{a^2-y^2}$$

et $$dx=\frac{y\,dy}{\sqrt{a^2-y^2}};$$

d'où $$x=-\sqrt{a^2-y^2}+c,$$

et enfin $$(x-c)^2+y^2=a^2.$$

Ainsi la courbe cherchée est un cercle dont le rayon est $a$ et dont le centre est sur l'axe des $x$.

## DIFFÉRENTIATION DES FONCTIONS COMPOSÉES.

**40.** Après avoir vu comment on différentie une fonction de la variable indépendante, nous allons différentier une fonction composée de plusieurs fonctions de cette va-

riable, et d'abord de deux. Ainsi, soit

$$y = f(u, v),$$

$u$ et $v$ étant deux fonctions de la variable indépendante; $x$ devenant $x + \Delta x$, $u$, $v$, $y$ deviennent respectivement $u + \Delta u$, $v + \Delta v$, $y + \Delta y$. Mais au lieu de changer à la fois $u$ en $u + \Delta u$, et $v$ en $v + \Delta v$ dans $f(u, v)$, il revient au même d'effectuer ces deux changements l'un après l'autre. On aura d'abord, pour la différence entre les deux états successifs de $y$,

$$f(u + \Delta u, v) - f(u, v).$$

Divisons ce résultat par $\Delta u$, et passons à la limite, en regardant $v$ comme invariable. On aura

$$\lim \frac{f(u + \Delta u, v) - f(u, v)}{\Delta u} = \frac{df(u, v)}{du} = \varphi(u, v).$$

On aurait, de même,

$$\lim \frac{f(u, v + \Delta v) - f(u, v)}{\Delta v} = \frac{df(u, v)}{dv} = \psi(u, v);$$

de là on conclut que, $\alpha$ et $6$ représentant des fonctions qui s'évanouissent en même temps que $\Delta x$, on a

$$(1) \qquad f(u + \Delta u, v) - f(u, v) = [\varphi(u, v) + \alpha]\Delta u,$$

$$(2) \qquad f(u, v + \Delta v) - f(u, v) = [\psi(u, v) + 6]\Delta v.$$

Changeant $u$ en $u + \Delta u$ dans (2), il vient

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u + \Delta u, v) \\ = [\psi(u + \Delta u, v) + 6']\Delta v, \end{array} \right.$$

$6'$ désignant ce que devient $6$ quand on y change $u$ en $u + \Delta u$, et s'annulant comme $6$ en même temps que $\Delta x$.

Ajoutant maintenant (1) et (3) membre à membre, et divisant par $\Delta x$, on a

$$\frac{f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v)}{\Delta x}$$

$$= [\varphi(u, v, + \alpha]\frac{\Delta u}{\Delta x} + [\psi(u + \Delta u, v) + 6']\frac{\Delta v}{\Delta x};$$

ce qui devient, à la limite,

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(u, v)\frac{du}{dx} + \psi(u, v)\frac{dv}{dx}$$

ou $$dy = \varphi(u, v)\,du + \psi(u, v)\,dv,$$

ou enfin

$$dy = \frac{dy}{du}du + \frac{dy}{dv}dv.$$

Il faut seulement observer que, dans $\frac{dy}{du}$ et $\frac{dy}{dv}$, $u$ et $v$ doivent être considérées comme des variables indépendantes, tandis que, dans les facteurs $du$ et $dv$ qui multiplient ces dérivées partielles, on doit regarder $u$ et $v$ comme des fonctions de $x$.

**41.** Le même théorème subsiste pour une fonction d'un plus grand nombre de fonctions de la variable indépendante. Ainsi, soit

$$y = f(u, v, z).$$

On a

$$\Delta y = f(u + \Delta u, v + \Delta v, z + \Delta z) - f(u, v, z).$$

Si l'on pose $$\frac{dy}{du} = \varphi(u, v, z),$$

$$\frac{dy}{dv} = \psi(u, v, z),$$

$$\frac{dy}{dz} = \chi(u, v, z),$$

on aura, d'après les considérations qui précèdent,

$$(1)\quad f(u + \Delta u, v, z) - f(u, v, z) = [\varphi(u, v, z) + \alpha]\,\Delta u,$$
$$(2)\quad f(u, v + \Delta v, z) - f(u, v, z) = [\psi(u, v, z) + \beta]\,\Delta v,$$
$$(3)\quad f(u, v, z + \Delta z) - f(u, v, z) = [\chi(u, v, z) + \gamma]\,\Delta z.$$

Faisant varier $u$ dans (2), on a

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &f(u + \Delta u, v + \Delta v, z) - f(u + \Delta u, v, z) \\ &= [\psi(u + \Delta u, v, z) + \beta']\,\Delta v. \end{aligned}\right.$$

Faisant varier $u$ et $v$ dans (3), on a

$$(5)\left\{\begin{aligned} &f(u + \Delta u, v + \Delta v, z + \Delta z) - f(u + \Delta u, v + \Delta v, z) \\ &= [\chi(u + \Delta u, v + \Delta v, z) + \gamma']\,\Delta z. \end{aligned}\right.$$

Ajoutant (1), (4) et (5) membre à membre, et divisant par $\Delta x$, il vient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=[\varphi(u,v,z)+\alpha]\frac{\Delta u}{\Delta x}+[\psi(u+\Delta u,v,z)+6']\frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$+[\chi(u+\Delta u,v+\Delta v,z)+\gamma']\frac{\Delta z}{\Delta x},$$

et, à la limite, on a

$$\frac{dy}{dx}=\varphi(u,v,z)\frac{du}{dx}+\psi(u,v,z)\frac{dv}{dx}+\chi(u,v,z)\frac{dz}{dx},$$

ou enfin

$$dy=\frac{dy}{du}du+\frac{dy}{dv}dv+\frac{dy}{dz}dz.$$

De là on peut conclure en général que la *différentielle d'une fonction* y *d'un nombre quelconque de fonctions de la variable indépendante s'obtient en prenant successivement la différentielle de la fonction* y, *par rapport à chaque fonction de la variable indépendante, dans laquelle seule cette variable serait supposée varier, et ajoutant toutes ces différentielles.*

Cette règle donnerait la différentielle d'un produit de fonctions considéré comme une fonction de ses facteurs.

---

# QUATRIÈME LEÇON.

**Notions générales sur les séries. — Théorèmes sur la convergence des séries. — Application à des exemples. — Limite de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$.**

## NOTIONS GÉNÉRALES SUR LES SÉRIES.

42. Avant de passer à la différentiation des fonctions transcendantes, il est nécessaire d'établir quelques notions générales sur les séries.

Une *série* est une suite composée d'un nombre infini de termes formés tous d'après une loi déterminée. $S_n$ représente, en général, la somme des $n$ premiers termes d'une série. Ainsi, $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ désignant divers termes successifs de la série, à partir du premier, on a

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n.$$

Si, à partir d'une valeur de $n$ suffisamment grande, $S_n$ approche indéfiniment d'une limite finie et déterminée, quand on prend $n$ de plus en plus grand, la série est dite *convergente*, et la limite S vers laquelle elle tend, est dite la *somme* de la série. La différence $S - S_n$, que l'on désigne par $R_n$, est appelée le *reste de la série*. On a donc, par définition,

$$R_n = S - S_n, \quad \text{où} \quad S = S_n + R_n.$$

Si, au contraire, la somme des $n$ premiers termes n'approche pas indéfiniment d'une limite fixe, quand $n$ augmente indéfiniment, la série est *divergente*.

Une des séries les plus simples est la progression géométrique

$$a, \quad ak, \quad ak^2, \quad ak^3, \ldots, \quad ak^{n-1}, \ldots.$$

Cette série est convergente, si la raison $k$ est plus petite que l'unité. En effet, on a, quel que soit $k$,

$$S_n = a + ak + ak^2 + \ldots + ak^{n-1} = \frac{a(1-k^n)}{1-k}$$

ou $$S_n = \frac{a}{1-k} - \frac{ak^n}{1-k}.$$

Or on voit que si $k$ est moindre que l'unité, $\frac{ak^n}{1-k}$ peut devenir aussi petit que l'on voudra, et dès lors $\frac{a}{1-k} = S$ sera la limite vers laquelle tend $S_n$. Si, au contraire, $k > 1$, $\frac{ak^n}{1-k}$ peut surpasser toute quantité donnée, et la série est divergente. Il en est de même si $k = 1$.

### THÉORÈMES SUR LA CONVERGENCE DES SÉRIES.

**43.** La somme d'une série convergente est une quantité déterminée qui souvent n'est pas susceptible d'une autre expression : elle peut être employée dans le calcul comme une fonction des lettres qu'elle renferme. Il est donc important de savoir si une série est convergente. Voyons donc en général comment on pourra reconnaître ce caractère.

Pour qu'une série soit convergente, *la condition nécessaire et suffisante consiste en ce que la somme d'un nombre quelconque de termes au delà du* n<sup></sup>ième*, $u_n$, soit aussi petite que l'on voudra, si* n *est suffisamment grand.* Cette condition est nécessaire puisque, les deux sommes $S_n$ et $S_{n+i}$ devant converger vers la même limite lorsque $n$ est de plus en plus grand, leur différence doit tendre vers o. Elle est suffisante, car si

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+i}$$

est compris entre $-\varepsilon$ et $+\varepsilon$, $S_{n+i}$ sera comprise entre $S_n - \varepsilon$ et $S_n + \varepsilon$, limites qui se rapprocheront de plus en plus à mesure que $n$ augmentera, $i$ restant le même, mais pouvant d'ailleurs être supposé aussi grand qu'on voudra.

**44.** De cette condition fondamentale résulte la suivante : qu'*à partir d'un terme* $u_n$, n *étant assez grand, les termes doivent finir par devenir plus petits que toute*

*quantité donnée*. Mais cette condition, qui est nécessaire, n'est pas suffisante. Ainsi l'exemple ci-dessous offre une série dans laquelle cette condition est évidemment remplie, mais qui n'est pas néanmoins convergente,

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}+\ldots;$$

car, en mettant la somme de la série sous la forme

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{16}\right)+\left(\frac{1}{17}+\ldots+\frac{1}{32}\right)+\ldots,$$

on voit que chaque partie renfermée entre parenthèses est plus grande que $\frac{1}{2}$, et comme il y en a une infinité, la série a nécessairement une somme infinie.

45. En général, pour reconnaître si une série est convergente, on compare ses termes, à partir d'un certain rang, à ceux d'une autre série qu'on sait être convergente, et s'il arrive que les termes de la première soient inférieurs ou au plus égaux à ceux de la seconde, alors cette première série est *convergente*. On peut se dispenser de comparer les premiers termes.

En comparant une série à une progression géométrique, on est conduit aux théorèmes suivants.

46. Théorème I. — *Une série dont tous les termes, ou du moins les termes très-éloignés, sont positifs, est convergente si, à partir d'un certain terme, le rapport d'un terme quelconque au précédent est plus petit qu'un nombre déterminé* k, *qui est lui-même plus petit que l'unité.*

Ainsi, supposons qu'à partir de $u_n$ cette condition soit remplie. On aura, $m$ étant plus grand que $n$,

$$u_{m+1} < ku_m,$$
$$u_{m+2} < ku_{m+1},$$

et à fortiori, $$u_{m+2} < k^2 u_m;$$

de même $$u_{m+3} < k^3 u_m,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$u_{m+i} < k^i u_m;$$

on aura donc

$$u_{m+1} + u_{m+2} + u_{m+3} + \ldots + u_{m+i} < u_m(k + k^2 + k^3 + \ldots + k^i).$$

Donc $$u_{m+1} + u_{m+2} + \ldots + u_{m+i} < u_m \frac{k - k^{i+1}}{1 - k}.$$

Or $$\frac{k - k^{i+1}}{1 - k}$$

est une quantité finie, quelque grand que soit $i$, puisque $k < 1$; d'ailleurs $u_m < k^{m-n} u_n$ peut devenir plus petit que toute quantité donnée, en prenant $m$ assez grand; par suite $u_{m+1} + u_{m+2} + \ldots + u_{m+i}$ peut devenir inférieur à tout ce que l'on voudra, en prenant $m$ suffisamment grand. Donc la série est convergente.

Au contraire, elle est divergente si l'on a $k > 1$.

Effectivement, si à partir de $u_n$ cette condition est remplie, les termes deviennent de plus en plus grands.

47. Théorème II. — *Une série est convergente, si à partir d'un certain terme on a constamment*

$$\sqrt[n]{u_n} < k < 1.$$

En effet, on aura, d'après cette condition,

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+i} < k^{n+1} + k^{n+2} + \ldots + k^{n+i},$$

ou bien $$u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+i} < k^n \frac{1 - k^{i+1}}{1 - k};$$

d'où l'on conclut, comme précédemment, que la série est alors convergente.

Au contraire, la série est divergente, si l'on a toujours, à partir d'un certain terme,

$$\sqrt[n]{u_n} > k > 1.$$

Et, en effet, comme de là on déduit $u_n > k^n$, il s'ensuit qu'en prenant $n$ suffisamment grand, $u_n$, et à fortiori le reste de la suite, sera plus grand que toute quantité donnée.

48. On a supposé jusqu'à présent que tous les termes de la série, ou du moins les termes très-éloignés, étaient positifs. Soit maintenant une série dont les termes aient des signes quelconques.

Si la nouvelle série qu'on obtient en prenant positivement tous les termes au delà d'un certain rang est convergente, la série proposée le sera aussi. Effectivement, le reste de la série donnée a une valeur absolue moindre que le reste de la série transformée; par conséquent, il peut devenir moindre que toute quantité donnée.

Cette condition de convergence est suffisante, mais non pas nécessaire.

49. Théorème III. — *Une série est convergente quand les termes éloignés sont alternativement positifs et négatifs, et vont en décroissant indéfiniment.*

En effet, supposons que cette loi se vérifie, dans la série

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \ldots + u_p + \ldots,$$

à partir d'un terme $u_{n+1}$ que nous supposerons positif. Appelons $U_{n+1}$, $U_{n+2}$, $U_{n+3}$, etc., la valeur absolue des termes $u_{n+1}$, $u_{n+2}$, $u_{n+3}$, etc. On aura, $p$ étant $> n$,

$$S_p = S_n + (U_{n+1} - U_{n+2}) + (U_{n+3} - U_{n+4}) + \ldots.$$

On voit par là que

$$S_p > S_n.$$

On a aussi

$$S_p = S_n + U_{n+1} - (U_{n+2} - U_{n+3}) - (U_{n+4} - U_{n+5}) \ldots.$$

Sous cette forme, on voit que

$$S_p < S_n + U_{n+1};$$

donc on a

$$S_n < S_p < S_n + U_{n+1}.$$

Donc $S_p$ est toujours compris entre $S_n$ et $S_n + U_{n+1}$, et comme $U_{n+1}$ peut devenir aussi petit que l'on voudra, la série est convergente.

50. On considère quelquefois, dans le calcul, des séries imaginaires de la forme

$$(u_1 + v_1\sqrt{-1}) + (u_2 + v_2\sqrt{-1}) + \ldots + (u_n + v_n\sqrt{-1}) + \ldots.$$

Cette série sera convergente, si les deux sommes

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots, \quad v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots,$$

sont convergentes.

### ÉTUDE DE QUELQUES SÉRIES.

**51.** Nous allons appliquer les règles précédentes à quelques exemples.

1°. $$1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} + \ldots.$$

Cette série est convergente, quel que soit $x$. En effet, on a

$$u_{p+1} = \frac{x^p}{1.2.3\ldots p},$$

et aussi $$u_p = \frac{x^{p-1}}{1.2.3\ldots(p-1)};$$

d'où $$\frac{u_{p+1}}{u_p} = \frac{x}{p}.$$

On voit par là que le rapport d'un terme au précédent finira toujours par devenir plus petit que tout ce que l'on voudra et, par conséquent, plus petit qu'une fraction quelconque $k$. Donc la série est convergente, et cela que $x$ soit positif ou négatif.

On peut savoir quel est, dans cette série, le plus grand terme pour une valeur donnée à $x$.

Supposons que l'on ait

$$i < x < i + 1;$$

le plus grand terme sera

$$\frac{x^i}{1.2.3\ldots i}.$$

En effet, on peut le mettre sous la forme

$$\frac{x}{1} \times \frac{x}{2} \times \frac{x}{3} \times \ldots \times \frac{x}{i},$$

et alors on voit que chaque facteur étant plus grand que 1, le produit augmente à mesure qu'il y en a plus; on voit

en même temps que ce produit diminuerait si l'on y ajoutait plus de facteurs; car les facteurs suivants seraient moindres que l'unité.

Supposons qu'on s'arrête à $\frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}$ et qu'on veuille avoir une limite supérieure du reste $R_n$. On aura

$$R_n = \frac{x^n}{1.2\ldots n}\left[\frac{x}{n+1} + \frac{x^2}{(n+1)(n+2)} + \ldots\right],$$

d'où

$$R_n < \frac{x^n}{1.2\ldots n}\left[\frac{x}{n+1} + \frac{x^2}{(n+1)^2} + \frac{x^3}{(n+1)^3} + \ldots\right],$$

ou, en supposant $n+1 > x$,

$$R_n < \frac{x^n}{1.2\ldots n} \cdot \frac{x}{n+1-x},$$

ou, enfin,

$$R_n < \frac{x^{n+1}}{1.2\ldots n} \cdot \frac{1}{n+1-x}.$$

2°. Les différents termes de la série

$$1 + x\cos x + \frac{x^2}{1.2}\cos 2x + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n}\cos nx + \ldots$$

sont plus petits que ceux de la série précédente. Donc la nouvelle série est convergente à plus forte raison.

3°. $$\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots$$

On a, dans cet exemple,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = x \times \frac{n}{n+1}.$$

Comme ce rapport tend vers $x$ à mesure que $n$ augmente, il en résulte que la série est convergente pour les valeurs de $x$ comprises entre $-1$ et $+1$.

On arrive à la même conclusion en appliquant le second théorème.

On peut facilement trouver une limite supérieure du

reste $R_n$. En effet, on a

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^{n+2}}{n+2} + \ldots < \frac{x^{n+1}}{n+1}(1 + x + x^2 + \ldots),$$

ou, puisque $x$ est moindre que 1,

$$R_n < \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{1-x}.$$

4°. Considérons cette autre série

$$1 + mx + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \ldots$$
$$+ \frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2\ldots p}x^p + \ldots.$$

On a, dans cet exemple,

$$\frac{u_{p+1}}{u_p} = \frac{m-p+1}{p}x = \left(\frac{m+1}{p} - 1\right)x.$$

Par là on voit que si $x < 1$ et $> 0$, quand $p$ est suffisamment grand, les termes finissent toujours par devenir alternativement positifs et négatifs, et par décroître indéfiniment. Donc alors la série est convergente. Elle l'est encore si $x < 0$ et que sa valeur absolue soit plus petite que 1; car dans ce cas le rapport $\frac{u_{p+1}}{u_p}$ finit toujours par être, en valeur absolue, constamment plus petit qu'une fraction quelconque $k$ plus grande que $x$. Si $x$ positif ou négatif est plus grand que 1, la série est divergente, car $\left(\frac{m+1}{p} - 1\right)x$ finit toujours par surpasser 1.

5°. Soit la série

(1) $$1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} + \ldots$$

Elle est divergente quand $m = 1$ ou $m < 1$, et convergente quand $m > 1$.

En effet, quand $m = 1$, on a

(2) $$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots,$$

série dont la divergence a été démontrée (44).

Quand $m$ est $< 1$, la série (1) est à plus forte raison divergente, puisque ses termes sont plus grands que les termes correspondants de la série (2).

Soit ensuite $m > 1$. On a

$$\frac{u_{p+1}}{u_p} = \frac{1}{(p+1)^m} : \frac{1}{p^m} = \left(\frac{p}{p+1}\right)^m.$$

On voit par là que ce rapport, quoique constamment plus petit que l'unité, finira toujours par en approcher autant qu'on voudra. On ne peut donc pas appliquer le premier théorème, mais on démontre la convergence de la série pour $m > 1$ en groupant les termes de la manière suivante :

$$1 + \left(\frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m}\right) + \left(\frac{1}{4^m} + \frac{1}{5^m} + \frac{1}{6^m} + \frac{1}{7^m}\right) + \left(\frac{1}{8^m} + \ldots + \frac{1}{15^m}\right) + \ldots.$$

D'où l'on conclut que la somme des termes est moindre que

$$1 \quad + \frac{2}{2^m} \qquad + \frac{4}{4^m} \qquad\qquad + \frac{8}{8^m} \quad + \ldots,$$

c'est-à-dire moindre que la somme de la progression géométrique décroissante

$$1 + \frac{1}{2^{m-1}} + \frac{1}{4^{m-1}} + \frac{1}{8^{m-1}} + \ldots.$$

6°. Si, dans la série

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots,$$

on fait $$x = 1,$$

on obtient la série numérique

$$2 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots n}, \ldots,$$

série convergente puisqu'elle dérive d'une série qui est convergente, quel que soit $x$. On en représente la somme par la lettre $e$.

Le nombre $e$ est compris entre 2 et 3; car on a évi-

demment

$$e > 2$$

et
$$e < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.2} + \frac{1}{2.2.2} + \ldots,$$

ou
$$e < 2 + 1 \quad \text{ou} \quad 3.$$

Il est facile de trouver une limite supérieure du reste $R_n$ de la série, ou de la somme

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n(n+1)} + \frac{1}{1.2.3\ldots n(n+1)(n+2)} + \ldots;$$

car

$$R_n < \frac{1}{1.2.3\ldots n}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \ldots\right),$$

ou
$$R_n < \frac{1}{1.2.3\ldots n} \times \frac{1}{n}.$$

On voit par là que la convergence est très-rapide. Les onze premiers termes donnent en effet $e = 2,7182818$, valeur approchée à un dix-millionième près.

LIMITE DE $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ QUAND $m$ CROIT INDÉFINIMENT.

**52.** *Le nombre* e *est la limite vers laquelle tend la quantité* $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ *quand* m *croît indéfiniment.*

Supposons d'abord $m$ entier et positif. On a

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = 1 + m \cdot \frac{1}{m} + \frac{m(m-1)}{1.2} \cdot \frac{1}{m^2} + \ldots$$
$$+ \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n} \cdot \frac{1}{m^n} + \ldots$$
$$= 2 + \frac{1 - \frac{1}{m}}{1.2} + \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{1.2.3} + \ldots$$
$$+ \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)}{1.2.3\ldots n} + \ldots.$$

Les termes de ce développement au nombre de $m$ sont

tous, à partir du second, plus petits que les termes de même rang de la série qui représente le nombre $e$, et ils augmentent avec $m$, d'où il suit que $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ augmente avec $m$, en restant toujours $< e$. Les numérateurs des premiers termes, qui sont

$$1-\frac{1}{m},\ \left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right),\ldots,$$

tendent indéfiniment vers l'unité, quand $m$ croît jusqu'à l'infini; et, par conséquent, ces termes tendent à devenir égaux à ceux de la série

$$2+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots.$$

Mais il n'en est pas de même pour les termes très-éloignés; car si, par exemple, $n-1$ était la moitié de $m$, le facteur $1-\frac{n-1}{m}$, dans le $n^{ième}$ terme, serait $\frac{1}{2}$, et le numérateur de ce terme serait $<\frac{1}{2}$. Cependant, en prenant $m$ très-grand, et négligeant dans les deux séries les termes très-éloignés qui font une très-petite somme, on conçoit que l'une des séries diffère infiniment peu de l'autre, et qu'ainsi $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ doit s'approcher indéfiniment de $e$.

53. Au surplus, en voici la démonstration très-rigoureuse. En s'arrêtant au $n^{ième}$ terme, on a

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m > 2+\frac{1-\frac{1}{m}}{1.2}+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{1.2.3}+\ldots$$
$$+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)}{1.2.3\ldots n}$$

et

$$e<2+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots+\frac{1}{1.2.3\ldots n}+\frac{1}{1.2.3\ldots n}\cdot\frac{1}{n}.$$

Quelque grand que soit $n$, on peut prendre le nombre $m$, qui est indépendant de $n$, tellement grand, que le numérateur

$$\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{m}\right),$$

qui est $< 1$, soit $> 1-\varepsilon$, $\varepsilon$ étant un nombre déterminé aussi petit qu'on voudra. Car ce numérateur étant $> \left(1-\frac{n-1}{m}\right)^{n-1}$, il suffira de poser

$$\left(1-\frac{n-1}{m}\right)^{n-1} > 1-\varepsilon,$$

d'où l'on tire $\quad m > \dfrac{n-1}{1-\sqrt[n-1]{1-\varepsilon}}.$

Alors, dans le développement de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, les numérateurs des termes jusqu'au $n^{ième}$ étant tous $> 1-\varepsilon$, on aura, en les remplaçant par $1-\varepsilon$ et négligeant les termes qui suivent le $n^{ième}$,

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m > 2+(1-\varepsilon)\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\cdots+\frac{1}{1.2.3\ldots n}\right),$$

et à fortiori

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m > 2+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\cdots+\frac{1}{1.2.3\ldots n}-\varepsilon,$$

puisque la somme

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\cdots+\frac{1}{1.2.3\ldots n}$$

(qui multiplie $\varepsilon$) est

$$<\frac{1}{2}+\frac{1}{2.2}+\cdots \quad \text{ou} \quad < 1.$$

On a d'ailleurs

$$e < 2+\frac{1}{1.2}+\cdots+\frac{1}{1.2.3..n}+\frac{1}{1.2.3\ldots n}\,\frac{1}{n}.$$

Ayant ainsi deux quantités qui renferment entre elles

$e$ et $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, on aura, en comparant les différences,

$$e-\left(1+\frac{1}{m}\right)^m<\frac{1}{1.2.3\ldots n}\cdot\frac{1}{n}+\varepsilon,$$

et comme on peut supposer $n$ aussi grand et $\varepsilon$ aussi petit qu'on veut, en faisant croître $m$ à l'infini, on voit que $e$ est la limite vers laquelle tend $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$.

**54.** Il en est de même si $m$ cesse d'être un nombre entier. Dans ce cas, $m$ tombe entre deux entiers consécutifs $p$ et $p+1$, et l'on a

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m<\left(1+\frac{1}{p}\right)^{p+1} \text{ et } >\left(1+\frac{1}{p+1}\right)^p$$

ou

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m<\left(1+\frac{1}{p}\right)^p\cdot\left(1+\frac{1}{p}\right)$$

et

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m>\left(1+\frac{1}{p+1}\right)^{p+1}:\left(1+\frac{1}{p+1}\right).$$

Quand $m$ croît, ces deux quantités, entre lesquelles la valeur de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ est toujours comprise, tendent l'une et l'autre vers la limite $e$ (puisque $p$ est entier). Donc $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ a la même limite.

**55.** Enfin si l'on fait $m$ négatif, $m=-\mu$, on aura

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=\left(1-\frac{1}{\mu}\right)^{-\mu}=\left(\frac{\mu-1}{\mu}\right)^{-\mu}=\left(\frac{\mu}{\mu-1}\right)^\mu$$
$$=\left(1+\frac{1}{\mu-1}\right)^\mu=\left(1+\frac{1}{\mu-1}\right)^{\mu-1}\cdot\left(1+\frac{1}{\mu-1}\right),$$

quantité dont la limite est encore $e$, quand $\mu$ devient infini.

**56.*** *Le nombre* e *est incommensurable*. En effet, si $e$ était un nombre commensurable $\frac{a}{b}$, on aurait

$$\frac{a}{b}=2+\frac{1}{1.2}+\ldots+\frac{1}{1.2\ldots b}+\frac{1}{1.2\ldots b(b+1)}+\ldots.$$

On en tirerait, en faisant passer $2+\frac{1}{1.2}+\ldots+\frac{1}{1.2.3\ldots b}$ dans le premier membre, multipliant par $1.2.3\ldots b$, et désignant par N un nombre entier,

$$N=\frac{1}{b+1}+\frac{1}{(b+1)(b+2)}+\ldots.$$

On a donc

$$N>0.$$

D'ailleurs

$$\frac{1}{b+1}+\frac{1}{(b+1)(b+2)}+\ldots<\frac{1}{b+1}+\frac{1}{(b+1)^2}+\ldots,$$

donc

$$N<\frac{1}{b}.$$

On aurait ainsi un nombre entier compris entre 0 et $\frac{1}{b}$, ce qui est absurde; $e$ est donc incommensurable.

---

# CINQUIÈME LEÇON.

**Différentiation des fonctions logarithmiques et exponentielles. — Des fonctions circulaires directes et inverses.**

---

## DIFFÉRENTIATION DES FONCTIONS LOGARITHMIQUES ET EXPONENTIELLES.

**57.** Soit $y$ le logarithme de $x$ dans le système dont la base est $a$, de sorte que

$$x = a^y.$$

Si $x$ devient $x + \Delta x$, $y$ devient $y + \Delta y$, et l'on a

$$y + \Delta y = \log(x + \Delta x),$$

d'où $$\Delta y = \log(x + \Delta x) - \log x = \log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

et $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}.$$

Si l'on pose $\Delta x = \frac{x}{m}$, on aura

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{m}{x}\log\left(1 + \frac{1}{m}\right) = \frac{1}{x}\log\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m.$$

Si l'on fait croître $m$ indéfiniment, $\Delta x$ diminuera jusqu'à zéro, et $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ atteindra la limite $e$; donc

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\log e,$$

d'où $$dy \quad \text{ou} \quad d\,.\log x = \frac{dx}{x}\log e.$$

**58.** Quand on prend $e$ pour base, les logarithmes appartiennent à ce qu'on appelle le système népérien : nous les désignerons par l.

Dans ce système, on a $\mathrm{l}\,e = 1$, et, par suite,

$$d\,\mathrm{l}\,x = \frac{dx}{x}.$$

Il est facile de passer d'un système quelconque au système népérien, et *vice versâ*.

En effet, l'équation

$$x = a^y$$

donne $$\text{l}\, x = y \,\text{l}\, a = \log x \,\text{l}\, a.$$

En faisant ici $x = e$, il vient

$$1 = \log e \,\text{l}\, a,$$

d'où $$\log e = \frac{1}{\text{l}\, a},$$

puis $$\log x = \text{l}\, x \times \frac{1}{\text{l}\, a} = \text{l}\, x \times \log e.$$

Le facteur constant $\frac{1}{\text{l}\, a}$ ou $\log e$, par lequel il faut multiplier les logarithmes népériens des nombres pour avoir leurs logarithmes dans un autre système dont la base est $a$, est appelé le *module* de ce dernier système. Quand on prend la base $a = 10$, le module est

$$\log e = 0,4342945.$$

En multipliant les logarithmes des Tables ordinaires par $\frac{1}{\log e}$ ou $\text{l}\, 10$ qui est $2,3025851$, on aura les logarithmes népériens.

59. La règle de différentiation des logarithmes est souvent utile pour différentier d'autres fonctions.

Ainsi, on peut s'en servir pour différentier $u^m$, quel que soit $m$, $u$ étant une fonction de la variable indépendante. On pose

$$y = u^m, \quad \text{d'où} \quad \text{l}\, y = m \,\text{l}\, u,$$

et en différentiant, il vient

$$\frac{dy}{y} = m \frac{du}{u},$$

ou $$d(u^m) = m u^{m-1}\, du.$$

Soit encore un produit de plusieurs fonctions de $x$, tel que $y = uvz$.

Comme il pourrait y avoir des facteurs négatifs, élevons au carré, et prenons les logarithmes; il viendra, après avoir différentié et divisé par 2,

$$\frac{dy}{y} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dz}{z},$$

résultat déjà obtenu par une autre méthode.

60. Soit

$$y = a^u,$$

$u$ désignant une fonction quelconque de $x$. En prenant les logarithmes des deux membres, dans le système népérien, pour plus de simplicité, il vient

$$\mathrm{l}y = u\,\mathrm{l}a, \quad \text{d'où} \quad \frac{dy}{y} = \mathrm{l}a\,du,$$

c'est-à-dire que

$$d(a^u) = a^u\,\mathrm{l}a\,du.$$

61. En particulier, si $a = e$ et $u = x$, on a

$$d(e^x) = e^x\,dx,$$

de sorte que la fonction $e^x$ est égale à sa dérivée.

On peut se demander si cette fonction est la seule qui jouisse de cette propriété. Pour répondre à cette question, posons

$$\frac{dy}{dx} = y,$$

on en tire $\dfrac{dy}{y}$ ou $d\,\mathrm{l}y = dx$,

donc $\mathrm{l}y = x + c$,

$$y = e^{x+c} = e^x e^c,$$

et, en remplaçant $e^c$ par C,

$$y = \mathrm{C}e^x,$$

ce qui montre que la fonction inconnue doit être le produit de $e^x$ par une constante.

62. Exemples.

1°. $$y = \mathrm{l}\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right).$$

On a

$$dy = \frac{dx + \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}}}{x+\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

2°. $$y = \mathrm{l}\left(\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\right).$$

On remarque d'abord que

$$\mathrm{l}\left(\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\right) = \mathrm{l}x - \mathrm{l}\sqrt{a^2+x^2};$$

d'où $$dy = \frac{dx}{x} - \frac{x\,dx}{a^2+x^2} = \frac{a^2\,dx}{x(a^2+x^2)}.$$

3°. $$y = \mathrm{l}\left[(x-a)^m (x-b)^n (x-c)^p \ldots\right].$$

Cette quantité est égale à

$$m\,\mathrm{l}(x-a) + n\,\mathrm{l}(x-b) + p\,\mathrm{l}(x-c) + \ldots;$$

donc

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m}{x-a} + \frac{n}{x-b} + \frac{p}{x-c} + \ldots.$$

Si l'on pose

$$(x-a)^m (x-b)^n (x-c)^p \ldots = f(x)$$

on aura encore $$\frac{dy}{dx} = \frac{d\,\mathrm{l}f(x)}{dx} = \frac{f'(x)}{f(x)},$$

et il en résulte

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{m}{x-a} + \frac{n}{x-b} + \frac{p}{x-c} + \ldots,$$

formule qui sert de base à la théorie des racines égales.

4°. $$y = v^u,$$

$v$ et $u$ étant deux fonctions de $x$. On a

$$\mathrm{l}y = u\,\mathrm{l}v,$$

d'où $$\frac{dy}{y} = du\,\mathrm{l}v + u\frac{dv}{v},$$

$$dy = y\,du\,\mathrm{l}v + \frac{y}{v}u\,dv,$$

ou bien encore

$$d(v^u) = v^u \, \mathrm{l} v \, du + v^{u-1} u \, dv.$$

Ce résultat pouvait d'ailleurs être obtenu en appliquant le théorème relatif à la différentiation des fonctions composées.

5°.
$$y = a^{b^x x},$$
$$dy = a^{b^x x} \, \mathrm{l} a \, b^x \, dx + a^{b^x x} \, b^x x \, \mathrm{l} a \, \mathrm{l} b \, dx.$$

### DIFFÉRENTIATION DES FONCTIONS CIRCULAIRES.

**63.** Commençons par établir d'une manière précise sous quel point de vue les fonctions circulaires sont considérées dans le Calcul infinitésimal.

Dans ce calcul, comme dans la Trigonométrie, les notations $\sin x$, $\cos x, \ldots$ représentent les rapports des droites ainsi nommées au rayon du cercle auquel elles appartiennent ; ce sont donc des nombres abstraits. La lettre $x$ représente la longueur d'un arc rapportée au rayon pris pour unité ; c'est encore un nombre abstrait. Alors le nombre $\pi = 3{,}1415926$ est la longueur de la demi-circonférence dont le rayon est l'unité ; $\frac{\pi}{180}$ est la longueur de l'arc de 1 degré ; et $\frac{\pi z}{180}$ est la longueur de l'arc de $z$ degrés, de sorte que l'on a

$$x = \frac{\pi z}{180}; \quad z = \frac{180^\circ}{\pi} \times x = 57^\circ\, 16' \times x.$$

L'arc égal au rayon est environ de $57^\circ\, 16'$.

**64.** Soit
$$y = \sin x.$$
$x$ devenant $x + \Delta x$, $y$ devient $y + \Delta y$, et l'on a
$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x),$$
d'où
$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x;$$
ou, d'après une formule connue,

$$\Delta y = 2 \sin \frac{1}{2} \Delta x \cos\left(x + \frac{1}{2} \Delta x\right).$$

Donc $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sin \frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x}\times\cos\left(x+\frac{1}{2}\Delta x\right).$$

Maintenant $\Delta x$ devenant nul, $\dfrac{\sin \frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x}$ a pour limite 1, et $\cos\left(x+\frac{1}{2}\Delta x\right)$ se réduit à $\cos x$; donc il vient

$$\frac{dy}{dx}=\cos x,$$

ou

$$d\sin x=\cos x\,dx.$$

Cette valeur montre que le sinus d'un arc augmente quand l'arc croît de o à $\frac{\pi}{2}$, diminue quand l'arc croît de $\frac{\pi}{2}$ à $\pi$, etc., comme on le voit sur une figure.

**65.** De la différentielle du sinus, il est facile de tirer celle du cosinus. En effet, on a

$$\cos z=\sin\left(\frac{\pi}{2}-z\right)$$

et

$$d\cos z=d\sin\left(\frac{\pi}{2}-z\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-z\right)d\left(\frac{\pi}{2}-z\right),$$

ou

$$d\cos z=-\sin z\,dz.$$

**66.** La différentielle de la tangente se déduit de la formule

$$\text{tang}\,z=\frac{\sin z}{\cos z},$$

qui donne

$$d\,\text{tang}\,z=\frac{\cos z\,d\sin z-\sin z\,d\cos z}{\cos^2 z}$$

ou

$$d\,\text{tang}\,z=\frac{dz}{\cos^2 z}.$$

On trouve de la même manière

$$d \cot z = -\frac{dz}{\sin^2 z}.$$

On voit que si l'arc $z$ augmente, $d \tang z$ est toujours positive, et $d \cot z$ toujours négative, c'est-à-dire que la tangente augmente sans cesse avec l'arc, et que la cotangente au contraire diminue continuellement.

67. On a

$$\text{séc}\, z = \frac{1}{\cos z},$$

d'où

$$d\, \text{séc}\, z = \frac{\sin z\, dz}{\cos^2 z}.$$

68. Ces règles suffisent pour différentier toutes les fonctions circulaires directes; en voici quelques exemples:

1°. $$d \sin(ax + b) = a \cos(ax + b)\, dx;$$

2°. $$d\, \mathrm{l} \sin x = \frac{dx}{\tang x};$$

3°. $$d \sin^m x = m \sin^{m-1} x \cos x\, dx;$$

4°. $$d \frac{\tang x}{x} = \frac{2x - \sin 2x}{x^2 \cos^2 x};$$

5°. $$d \frac{\sin x}{x} = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} dx = \frac{\cos x (x - \tang x)}{x^2} dx.$$

Cette dernière différentielle, étant négative quand $x$ est $< \pi$, fait voir que le rapport $\frac{\sin x}{x}$ va sans cesse en diminuant, lorsque $x$ croît de o à $\pi$.

### DIFFÉRENTIATION DES FONCTIONS CIRCULAIRES INVERSES.

69. Les fonctions circulaires inverses sont celles dans lesquelles on regarde un arc comme fonction d'une de ses lignes trigonométriques. On représente l'arc dont le sinus est $x$ par la notation arc $(\sin = x)$, ou plus simplement par arc sin $x$. On écrit de même arc cos $x$, arc tang $x$.

Soit d'abord

$$z = \text{arc} \sin u,$$

$u$ étant une fonction de $x$. On aura

$$u = \sin z;$$

d'où

$$du = dz \cos z,$$

et

$$dz = \frac{du}{\cos z} = \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}}$$

ou

$$d \operatorname{arc} \sin u = \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}}.$$

Comme $\sqrt{1 - u^2}$ remplace $\cos z$, il faudra donner à ce radical le signe de $\cos z$.

70. Soit

$$z = \operatorname{arc} \cos u, \quad \text{d'où} \quad u = \cos z;$$

On aura

$$du = - \sin z \, dz;$$

d'où

$$dz = - \frac{du}{\sin z} = - \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}}.$$

Ainsi

$$d \operatorname{arc} \cos u = - \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}}.$$

Comme $\sqrt{1 - u^2}$ remplace $\sin z$, il faut donner à ce radical le signe de $\sin z$.

A cause de la double valeur de $\sqrt{1 - u^2}$, on voit que, pour une même valeur de $u$, les différentielles de arc sin $u$ et de arc cos $u$ sont égales et de signes contraires, ou bien égales et de même signe, ce qui tient à ce que ces deux arcs ont alors une somme ou une différence constante.

71. Soit

$$\operatorname{tang} z = u.$$

On a

$$\frac{dz}{\cos^2 z} = du;$$

d'où

$$dz = du \cos^2 z = \frac{du}{1 + u^2};$$

donc

$$d \operatorname{arc} \operatorname{tang} u = \frac{du}{1 + u^2}.$$

On trouve de même

$$d \operatorname{arc} \cot u = -\frac{du}{1+u^2}.$$

On voit que, pour une même valeur de $u$, $d$ arc tang $u$ et $d$ arc cot $u$ sont toujours égales et de signes contraires. En effet, les arcs correspondants ont toujours une somme constante.

72. Exemples : 1°.

$$d \operatorname{arc} \sin \frac{\sqrt{2ax-x^2}}{a} = \frac{\frac{1}{a} \cdot \frac{2a-2x}{2\sqrt{2ax-x^2}}}{\sqrt{1-\frac{2ax-x^2}{a^2}}} dx = \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}};$$

2°. $$d \operatorname{arc} \sin 2x\sqrt{1-x^2} = \frac{2\,dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

3°. $$d \operatorname{arc} \operatorname{tang} \left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{u^2+v^2}.$$

On trouve ainsi que

$$d \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Ce dernier résultat pouvait être prévu, car on sait que

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d \operatorname{arc} \sin x, \quad \operatorname{tang} \operatorname{arc} \sin x = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

4°. $$d \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{u+v}{1-uv} = \frac{(1-uv)(du+dv)+(u+v)(u\,dv+v\,du)}{(u+v)^2+(1-uv)^2}$$
$$= \frac{(1+v^2)\,du+(1+u^2)\,dv}{(1+u^2)(1+v^2)},$$

ou $$d \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{u+v}{1-uv} = \frac{du}{1+u^2} + \frac{dv}{1+v^2},$$

résultat facile à prévoir, puisque

$$\operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{u+v}{1-uv} = \operatorname{arc} \operatorname{tang} u + \operatorname{arc} \operatorname{tang} v.$$

73. Les exemples suivants, où toutes les fonctions trans-

cendantes sont combinées entre elles, fourniront l'occasion d'appliquer les règles trouvées dans ce chapitre :

$$e^{x^m},$$
$$e^{\sin x},$$
$$e^{\text{tang}\, x},$$
$$x^{\sin x},$$
$$e^{\text{arc sin}\, x},$$
$$e^{ax} \sin bx,$$
$$e^{-x^2} \cos bx,$$
$$\log(\cos x),$$
$$\log \text{tang}\, x,$$
$$\sin(\log x),$$
$$\sin^m x \cos^n x,$$
$$\text{arc cos}\, \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$
$$\text{arc cos}\left(\frac{a \cos x + b}{b \cos x + a}\right),$$
$$\text{arc tang}\left(\sqrt{1+x^2} - x\right),$$
$$\text{arc tang}\left(\frac{x-a}{b-x}\right),$$
$$\text{arc tang}\left(\frac{ax+b}{c}\right),$$
$$\log \text{arc cos}\, \sqrt{1-x^2},$$
$$\log \frac{1-\cos x}{1+\cos x},$$
$$\frac{\sin x\,(2 + a \cos x)}{(1 + a \cos x)^2}.$$

---

# SIXIÈME LEÇON.

**Différentiation des fonctions implicites. — Élimination d'une constante entre l'équation proposée et l'équation qu'on obtient par la différentiation. — Différentiation des fonctions implicites données par un nombre quelconque d'équations. — Dérivées et différentielles successives. — Du changement de la variable indépendante.**

---

## DIFFÉRENTIATION DES FONCTIONS IMPLICITES.

**74.** Nous avons vu qu'on nomme *fonctions implicites* celles qui sont liées à la variable dont elles dépendent par une ou plusieurs équations non résolues.

Supposons d'abord deux quantités $x$ et $y$ liées entre elles par une seule équation

$$f(x, y) = 0;$$

et supposons que $x$ soit la variable indépendante. On peut trouver $dy$ ou $\frac{dy}{dx}$ sans être obligé de résoudre l'équation par rapport à $y$. En effet, si l'on tirait de cette équation la valeur de $y$ en fonction de $x$, $y = \varphi(x)$, en mettant cette valeur à la place de $y$ dans $f(x, y)$, on aurait identiquement

$$f[x, \varphi(x)] = 0.$$

Donc la différentielle de $f(x, y)$, prise en regardant $y$ comme une fonction de $x$, doit être identiquement nulle, et, d'après la règle qui sert à différentier une fonction composée, on a

$$\frac{df}{dx} dx + \frac{df}{dy} dy = 0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}}.$$

Ainsi, *la dérivée de la fonction implicite* y *s'obtient en divisant la dérivée du premier membre de l'équation par rapport à* x, *par la dérivée de ce membre prise par rapport à* y *et en changeant le signe du quotient*.

75. A l'aide de la règle précédente, on peut, lorsqu'on a l'équation d'une courbe sous la forme

$$f(x, y) = 0,$$

obtenir le coefficient angulaire de la tangente en un point quelconque de cette courbe, c'est-à-dire $\frac{dy}{dx}$, sans résoudre l'équation par rapport à l'une des variables. En voici quelques exemples.

1°. Soit l'équation de l'ellipse

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2.$$

En différentiant, on a

$$2a^2 y dy + 2b^2 x dx = 0;$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}.$$

L'équation de l'ellipse donne deux valeurs de $y$,

$$y_1 = +\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \quad y_2 = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

auxquelles correspondent deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$, qui sont

$$\frac{dy_1}{dx} = -\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad \frac{dy_2}{dx} = \frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

En général, $\frac{dy}{dx}$ a autant de valeurs que $y$.

2°. Soit l'équation

$$Ay^m + Bx^n + Cx^p y^q = 0,$$

on en tire

$$mAy^{m-1}dy + nBx^{n-1}dx + pCx^{p-1}y^q dx + qCx^p y^{q-1}dy = 0,$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{nBx^{n-1} + pCx^{p-1}y^q}{mAy^{m-1} + qCy^{q-1}x^p}.$$

3°. Soit $x^3 + y^3 - 3axy = 0$;
on en déduit

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}.$$

Comme, en général, à une même valeur de $x$ répondent trois valeurs de $y$ ou trois points de la courbe, il y a aussi trois valeurs correspondantes de $\frac{dy}{dx}$.

4°. Soit encore l'équation

$$a^2 \sin\frac{x+y}{a} = xy,$$

qu'on ne pourrait pas résoudre par rapport à $y$; elle donne

$$a\cos\frac{x+y}{a}(dx + dy) = xdy + ydx;$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - a\cos\frac{x+y}{a}}{a\cos\frac{x+y}{a} - x}.$$

### ÉLIMINATION DES CONSTANTES.

76. Entre une équation donnée et l'équation qu'on en tire par la différentiation, on peut éliminer une constante; il en résulte une nouvelle équation qui exprime une propriété de la tangente, commune à toutes les courbes que représente l'équation proposée, quand on y donne différentes valeurs à la constante.

Ainsi, soit $y^2 = 2ax$;

on en tire $ydy = a\,dx$,

puis, en éliminant $a$,

$$y\frac{dx}{dy} = 2x.$$

C'est-à-dire que *dans toutes les paraboles qui ont le même axe et le même sommet, la sous-tangente est*

*double de l'abscisse du point de contact, quel que soit le paramètre* 2a.

L'équation

$$y^2 = 2ax + a^2,$$

qui représente une suite de paraboles ayant le même axe et le même foyer situé à l'origine, conduit par l'élimination à l'équation

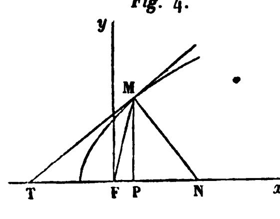


Fig. 4.

$$y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2x\frac{dy}{dx} - y = 0,$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x + \sqrt{x^2+y^2}}{y},$$

ou

$$x + y\frac{dy}{dx} = \sqrt{x^2+y^2},$$

Mais $\qquad x = \text{FP}, \quad y\frac{dy}{dx} = \text{PN}, \quad \sqrt{x^2+y^2} = \text{FM};$

on aura donc

$$\text{FM} = \text{FN}, \quad \text{puis} \quad \text{FM} = \text{FT}.$$

C'est-à-dire que *dans toute parabole le foyer est également distant des points où la tangente et la normale rencontrent l'axe, ainsi que du point de contact.*

## DIFFÉRENTIATION DES FONCTIONS IMPLICITES DONNÉES PAR PLUSIEURS ÉQUATIONS.

77. De même que nous avons déduit $\frac{dy}{dx}$ de l'équation

$$f(x, y) = 0,$$

sans la résoudre, nous allons tirer $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$ du système des deux équations

(1) $\qquad f(x, y, z) = 0,$

(2) $\qquad \text{F}(x, y, z) = 0.$

Si l'on tirait de (1) et (2) les valeurs de $y$ et de $z$ en fonction de $x$, savoir $y=\varphi(x)$ et $z=\psi(x)$, et qu'on les portât dans ces équations, les premiers membres

$$f[x, \varphi(x), \psi(x)], \quad F[x, \varphi(x), \psi(x)],$$

seraient identiquement nuls; donc leurs différentielles seraient nulles aussi. Il faut donc égaler à zéro les différentielles de $f(x, y, z)$ et $F(x, y, z)$, en y regardant $y$ et $z$ comme des fonctions de la variable indépendante $x$. On obtient ainsi

$$(3) \qquad \frac{df}{dx}dx+\frac{df}{dy}dy+\frac{df}{dz}dz=0,$$

$$(4) \qquad \frac{dF}{dx}dx+\frac{dF}{dy}dy+\frac{dF}{dz}dz=0,$$

d'où l'on tire, par la résolution de ces deux équations, qui ne renferment les deux inconnues $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{dz}{dx}$ qu'au premier degré,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{df}{dx}\frac{dF}{dz}-\frac{df}{dz}\frac{dF}{dx}}{\frac{df}{dz}\frac{dF}{dy}-\frac{df}{dy}\frac{dF}{dz}},$$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\frac{df}{dy}\frac{dF}{dx}-\frac{df}{dx}\frac{dF}{dy}}{\frac{df}{dz}\frac{dF}{dy}-\frac{df}{dy}\frac{dF}{dz}}.$$

Si l'équation (1) ne contenait pas $x$, on aurait

$$\frac{df}{dx}=0,$$

et l'équation (3) deviendrait simplement

$$\frac{df}{dy}dy+\frac{df}{dz}dz=0;$$

d'où l'on tirerait

$$\frac{dz}{dy}=\frac{-\frac{df}{dy}}{\frac{df}{dz}},$$

Cette dernière expression est le rapport des différentielles de $z$ et de $y$ considérées comme fonctions de $x$ ; mais c'est aussi bien la fonction dérivée de $z$ considérée comme fonction de $y$, en prenant $y$ comme une variable indépendante. En effet, $z$ étant fonction de $y$, en posant

$$z = \varphi(y)$$

et prenant les différentielles par rapport à $x$, on a, d'après la règle des fonctions de fonctions,

$$dz = \varphi'(y)\, dy, \quad \text{d'où} \quad \varphi'(y) = \frac{dz}{dy}.$$

78. En général, si l'on a $n$ équations entre $n+1$ variables, une seule sera indépendante, toutes les autres seront fonctions de celle-là. On égalera à zéro les différentielles des premiers membres de toutes ces équations; on aura ainsi $n+1$ équations où $dx$, $dy$, $dz$, etc., entreront au premier degré, et d'où l'on tirera les valeurs de $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, etc.

79. Soient, comme exemples, les deux équations

$$(1) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = k^2,$$

$$(2) \qquad ax + by + cz + h = 0,$$

on en tire, par la différentiation,

$$xdx + ydy + zdz = 0,$$

$$adx + bdy + cdz = 0,$$

et

$$(3) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{az - cx}{cy - bz},$$

$$(4) \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{bx - ay}{cy - bz}.$$

Voici l'interprétation géométrique de ce résultat : les coordonnées étant supposées rectangulaires, les équations (1) et (2) représentent, la première une sphère dont le

centre est à l'origine des coordonnées et la seconde un plan; le système des deux équations représente donc le cercle résultant de l'intersection de ces deux surfaces. $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{dz}{dx}$ donnent l'inclinaison des tangentes aux projections de ce cercle sur le plan des $xy$ et sur celui des $zx$.

On connaît donc les projections de la tangente sur deux des plans coordonnés, et par suite cette tangente elle-même.

### DÉRIVÉES ET DIFFÉRENTIELLES DE DIVERS ORDRES.

**80.** Soit $y = f(x)$ une fonction quelconque de $x$, et $y'$ sa dérivée. Cette dérivée étant une fonction de $x$, on peut la différentier, et l'on obtient ainsi la fonction dérivée de $y'$, que l'on appelle la dérivée seconde, ou du second ordre de $y$, et qu'on désigne par $y''$. De même $y''$ aura une dérivée $y'''$, et, en continuant ainsi, on aura les dérivées de tous les ordres de $y$ ou $f(x)$. On les représente aussi par $f'(x), f''(x), f'''(x), \ldots$

A ces dérivées correspondent les différentielles successives de $y$. En regardant $h$, qui est l'accroissement arbitraire de $x$ comme une constante, on a

$$dy = y'h, \quad d(dy) = d(y')h = y''h^2,$$

et ainsi de suite; donc si l'on indique $d(dy)$ par $d^2y$, $d(d^2y)$ par $d^3y$, et ainsi de suite, on pourra écrire

$$dy = y'h, \quad d^2y = y''h^2, \quad d^3y = y'''h^3, \ldots, \quad d^ny = y^{(n)}h^n.$$

Comme $h$, ou l'accroissement arbitraire de $x$, est la même chose que $dx$, ces relations deviennent

$$dy = y'dx, \; d^2y = y''dx^2, \; d^3y = y'''dx^3, \ldots, \; d^ny = y^{(n)}dx^n.$$

On tire de là, pour les notations des dérivées successives,

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad y''' = \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots, \quad y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}.$$

**81.** Exemples : 1°. $y = x^m$.

$$y' \text{ ou } \frac{dy}{dx} = mx^{m-1},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = m(m-1)(m-2)x^{m-3},$$

...... ..................

$$\frac{d^ny}{dx^n} = m(m-1)\ldots(m-n+1)x^{m-n},$$

..............................

$$\frac{d^my}{dx^m} = m(m-1)\ldots3.2.1.$$

On voit donc que, si $m$ est entier, $\frac{d^my}{dx^m}$ a une valeur constante, et que les dérivées ultérieures se réduisent à zéro.

2°. $$y = Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots.$$

$$\frac{dy}{dx} = mAx^{m-1} + (m-1)Bx^{m-2} + \ldots,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = m(m-1)Ax^{m-2} + (m-1)(m-2)Bx^{m-3} + \ldots;$$

et, si $m$ est un nombre entier,

$$\frac{d^my}{dx^m} = 1.2.3\ldots m.A.$$

Les dérivées suivantes sont nulles.

3°. $$y = a^x.$$

$$\frac{dy}{dx} = a^x \, \mathrm{l}a, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = a^x(\mathrm{l}a)^2, \ldots, \quad \frac{d^ny}{dx^n} = a^x(\mathrm{l}a)^n.$$

Si l'on prend $a = e$, on a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = \ldots = \frac{d^ny}{dx^n} = y = e^x.$$

4°. $$y = \log x;$$

$$\frac{dy}{dx} = x^{-1}.\log e,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -1.x^{-2}.\log e,$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 1.2.x^{-3}.\log e,$$

.................................

$$\frac{d^ny}{dx^n} = (-1)^{n-1}\, 1.2.3\ldots(n-1)\,x^{-n}.\log e.$$

5°. $$y = \sin x;$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos x;\quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\sin x;\quad \frac{d^3y}{dx^3} = -\cos x;\quad \frac{d^4y}{dx^4} = \sin x.$$

Les dérivées suivantes reprennent périodiquement ces quatre valeurs.

On peut remarquer aussi que

$$\frac{dy}{dx} = \sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right);$$

d'où $$\frac{d^2y}{dx^2} = \sin\left(x + \frac{2}{2}\pi\right),\quad \frac{d^3y}{dx^3} = \sin\left(x + \frac{3}{2}\pi\right),$$

et en général

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \sin\left(x + \frac{n}{2}\pi\right).$$

De même pour $y = \cos x$, on trouverait

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \cos\left(x + \frac{n}{2}\pi\right).$$

82. Quand la fonction $y$ est implicite, on peut avoir ses dérivées successives sans résoudre l'équation qui la détermine. Ainsi, soit

(1) $$f(x, y) = 0,$$

on aura

(2) $$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}y' = 0,$$

équation qui fournit d'abord la valeur de $y'$ en fonction de $x$ ou de $y$, ou en fonction de $x$ seulement si l'on élimine $y$ entre les équations (1) et (2).

Maintenant, représentons par

$$\varphi(x, y, y') = 0$$

l'équation (2), ou plus généralement une combinaison quelconque des équations (1) et (2). On pourra considérer la fonction $\varphi$ comme identiquement nulle, si l'on y suppose $y$ et $y'$ remplacées par leurs valeurs en fonction de $x$. Donc on doit avoir $d\varphi = 0$, ou

$$\frac{d\varphi}{dx}dx + \frac{d\varphi}{dy}dy + \frac{d\varphi}{dy'}dy' = 0;$$

d'où

$$(3) \qquad \frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy}y' + \frac{d\varphi}{dy'}y'' = 0.$$

Cette équation fera connaître $y''$ en fonction de $x$, $y$ et $y'$, ou en fonction de $x$ seule, si l'on élimine $y$ et $y'$ entre les équations (1), (2) et (3).

On trouverait de même $y'''$, $y^{\text{iv}}$, etc.

Nous verrons plus loin (n° 104) comment les équations qui déterminent $y''$, $y'''$, etc., peuvent se former au moyen des dérivées successives du premier membre $f(x, y)$ de l'équation primitive, prises par rapport à $x$ et à $y$.

### DU CHANGEMENT DE LA VARIABLE INDÉPENDANTE.

83. Si l'on a $n$ équations entre $(n+1)$ variables, $y, x, t, u, v, \ldots$, on peut en regarder une comme indépendante, et imaginer que toutes les autres soient exprimées en fonction de celle-ci. Si l'on choisit $t$, par exemple, on a

$$y = \psi(t) \quad \text{et} \quad d^n y = \psi^{(n)}(t)\, dt^n.$$

Supposons, maintenant, qu'auparavant $x$ ait été la variable indépendante, et que l'on ait

$$y = f(x) \quad \text{et} \quad x = \varphi(t).$$

L'élimination de $x$ entre ces deux équations conduirait à l'équation $y = \psi(t)$, qui, par la différentiation immédiate, donnerait les dérivées $\psi'(t), \psi''(t), \ldots, \psi^n(t)$ de $y$, en considérant $y$ comme fonction de la nouvelle variable indépendante $t$.

Le problème que nous allons traiter consiste à chercher, sans passer par l'élimination de $x$, les dérivées ou différentielles successives de $y$ considérée comme fonction de $t$, par le moyen de $f'(x), f''(x)$, etc., et des dérivées ou différentielles de $x$ prises en regardant $x$ comme fonction de $t$.

84. A cet effet, si l'on prend $t$ pour variable indépendante, et que l'on considère $x$ et $y$ comme fonctions de $t$, on a, d'après la règle relative aux fonctions de fonctions,

$$dy = f'(x)\,dx.$$

En différentiant cette équation par rapport à $t$ et regardant $dx$, non plus comme une constante, mais comme une fonction de $t$, on a

$$d^2y = f''(x)\,dx^2 + f'(x)\,d^2x.$$

On trouve de même

$$d^3y = f'''(x)\,dx^3 + 3f''(x)\,dx\,d^2x + f'(x)\,d^3x;$$

et ainsi de suite.

Si, au lieu des différentielles de $y$ ou de $\psi(t)$ par rapport à $t$, on veut avoir ses dérivées $\psi'(t), \psi''(t)$, etc., il suffit de diviser les équations précédentes par $dt, dt^2, dt^3$ respectivement, ce qui donne

$$\psi'(t) = f'(x)\varphi'(t),$$
$$\psi''(t) = f''(x)\varphi'(t)^2 + f'(x)\varphi''(t),$$
$$\psi'''(t) = f'''(x)\varphi'(t)^3 + 3f''(x)\varphi'(t)\varphi''(t) + f'(x)\varphi'''(t).$$

85. Réciproquement, si l'on connaît les différentielles ou dérivées successives de $x$ et de $y$ considérées comme des fonctions $\varphi(t), \psi(t)$ de la variable indépendante $t$, on en peut déduire les dérivées $f'(x), f''(x)$, etc., de $y$ consi-

5..

dérée comme fonction de $x$. Car on tire des équations précédentes :

$$f'(x)=\frac{dy}{dx},$$

$$f''(x)=\frac{dxd^2y-dyd^2x}{dx^3},$$

$$f'''(x)=\frac{dx(dxd^3y-dyd^3x)-3d^2x(dxd^2y-dyd^2x)}{dx^5},$$

les différentielles dans les seconds membres étant toujours relatives à $t$.

86. Il y a un autre moyen d'arriver à ces formules.

On a d'abord $$f'(x)=\frac{dy}{dx}.$$

En différentiant les deux membres de cette équation par rapport à $t$, on trouve

$$f''(x)\,dx=d.\frac{dy}{dx}=\frac{dxd^2y-dyd^2x}{dx^2},$$

et, en divisant par $dx$,

$$f''(x)=\frac{dxd^2y-dyd^2x}{dx^3}.$$

En différentiant de nouveau par rapport à $t$, on aura $f'''(x)$, et ainsi de suite.

87. On doit remarquer que la dérivée première $f'(x)$ est la seule dont l'expression par les différentielles de $x$ et de $y$ reste la même, quand on cesse de prendre $x$ pour variable indépendante ou quand $dx$ cesse d'être constante.

En effet, $f'(x)$ est toujours exprimée par $\frac{dy}{dx}$, tandis que les autres dérivées $f''(x)$, $f'''(x)$, etc., qui sont représentées par $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, etc., lorsque $x$ est la variable indépendante, ont des expressions plus compliquées quand

on regarde $x$ et $y$ comme des fonctions de la nouvelle variable indépendante $t$.

88. Il se présente ici une vérification des formules générales. Si l'on prend $x$ pour variable indépendante, en faisant $x = t$, on a

$$\frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^3x}{dt^3} = 0,$$

et l'on trouve

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}, \quad f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots,$$

$dx$ est à présent constante, et les différentielles $dy$, $d^2y$, etc., se rapportent à $x$.

89. Si l'on prenait $y$ pour variable indépendante, l'équation

$$y = f(x)$$

étant résolue par rapport à $x$, donnerait une valeur de la forme

$$x = F(y).$$

$F(y)$ est dite la *fonction inverse* de $f(x)$. Il faudrait faire alors $y = t$, d'où

$$dy = dt, \quad d^2y = 0, \quad d^3y = 0, \ldots,$$

puis

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)} = \frac{1}{F'(y)},$$

$$f''(x) = -\frac{dy\, d^2x}{dx^3} = -\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3} = -\frac{F''(y)}{F'(y)^3},$$

$$f'''(x) = \frac{-dx\, dy\, d^3x + 3\, dy\, (d^2x)^2}{dx^5}$$

$$= \frac{-\frac{dx}{dy}\frac{d^3x}{dy^3} + 3\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^5} = \frac{3\,F''(y)^2 - F'(y)\,F'''(y)}{F''(y)^5}.$$

**90.** Voici un exemple de ce changement de variable indépendante.

Soit $y = f(x)$, et soit l'expression

$$u = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{[1 + f'(x)^2]^{\frac{3}{2}}}{f''(x)},$$

dans laquelle $dy$ et $d^2y$ sont les différentielles de $y$ ou de $f(x)$ par rapport à la variable indépendante $x$.

1°. Si l'on prend maintenant pour variable indépendante une variable quelconque $t$ liée à $x$ et à $y$ par les équations

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

les relations précédemment trouvées (81) donnent

$$u = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{dx\, d^2y - dy\, d^2x}{dx^3}} = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\, d^2y - dy\, d^2x},$$

ou bien

$$u = \frac{\left[1 + \frac{\psi'(t)^2}{\varphi'(t)^2}\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{\varphi'(t)\,\psi''(t) - \psi'(t)\,\varphi''(t)}{\varphi'(t)^3}} = \frac{[\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2]^{\frac{3}{2}}}{\varphi'(t)\,\psi''(t) - \psi'(t)\,\varphi''(t)}.$$

2°. Si l'on prend pour variable indépendante la fonction inverse $y$, on aura, en supposant $x = F(y)$,

$$u = -\frac{\left[1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2x}{dy^2}} = -\frac{[1 + F'(y)^2]^{\frac{3}{2}}}{F''(y)}.$$

Par exemple, si l'on a

$$x = a(1 - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t),$$

on aura

$$dx = a(1 - \cos t)\,dt, \quad dy = a \sin t\,dt,$$

$$d^2x = a \sin t\,dt^2, \quad d^2y = a \cos t\,dt^2.$$

La substitution de ces valeurs donne (en omettant le signe —),

$$u = 2a\sqrt{2(1 - \cos t)} = 2\sqrt{2ay}.$$

---

# SEPTIÈME LEÇON.

*Des fonctions de plusieurs variables indépendantes.*—Différentielles partielles et totales.— Propriétés de la différentielle totale —Différentielle d'une fonction composée, d'une fonction implicite.— Dérivées et différentielles de divers ordres.— Théorème sur l'ordre des différentiations.— Différentielles totales de divers ordres des fonctions explicites ou implicites.

---

### DIFFÉRENTIELLES PARTIELLES ET TOTALES D'UNE FONCTION DE PLUSIEURS VARIABLES INDÉPENDANTES.

**91.** Soit

$$u = f(x, y, z)$$

une fonction de plusieurs variables indépendantes.

En ne faisant varier que $x$, on peut prendre la dérivée de cette fonction par rapport à $x$ : cette *dérivée partielle* $\left(\text{qui est la limite du rapport } \frac{\Delta u}{\Delta x}\right)$ sera une certaine fonction $\varphi(x, y, z)$; on la représente par la notation $\frac{du}{dx}$ ou $\frac{df(x, y, z)}{dx}$. En la multipliant par $dx$ ou par l'accroissement arbitraire de $x$, on a la *différentielle partielle* de $u$ par rapport à $x$, qu'on indique par

$$\frac{du}{dx} dx, \quad \text{ou} \quad \varphi(x, y, z) dx.$$

On pourra prendre de même la dérivée et la différentielle de $u$ par rapport à $y$, et aussi par rapport à $z$.

**92.** Si l'on pose

$$\frac{du}{dx} = \varphi(x, y, z), \quad \frac{du}{dy} = \psi(x, y, z), \quad \frac{du}{dz} = \chi(x, y, z),$$

la somme des différentielles partielles de $u$ par rapport à toutes les variables, ou

$$\varphi(x, y, z) dx + \psi(x, y, z) dy + \chi(x, y, z) dz,$$

est ce qu'on appelle la *différentielle totale* de $u$; $dx$, $dy$, $dz$ ne sont autre chose que les accroissements arbitraires de $x, y, z$, ou $\Delta x$, $\Delta y$, $\Delta z$.

93. Pour trouver l'expression de l'accroissement total $\Delta u$ de la fonction $u$, nous allons reprendre le mode de démonstration employé pour les fonctions composées. On aura, en désignant par $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ des fonctions qui tendent vers zéro, avec $\Delta x$, $\Delta y$ et $\Delta z$ respectivement,

$$(1)\ f(x+\Delta x, y, z) - f(x, y, z) = [\varphi(x, y, z) + \alpha]\,\Delta x,$$
$$(2)\ f(x, y+\Delta y, z) - f(x, y, z) = [\psi(x, y, z) + \beta]\,\Delta y,$$
$$(3)\ f(x, y, z+\Delta z) - f(x, y, z) = [\chi(x, y, z) + \gamma]\,\Delta z.$$

Supposons que l'on fasse varier seulement $x$ dans l'équation (2), puis $x$ et $y$ dans l'équation (3), il viendra

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y, z) - f(x+\Delta x, y, z) = [\psi(x+\Delta x, y, z) + \beta']\,\Delta y$$

et

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x+\Delta x, y+\Delta y, z) = [\chi(x+\Delta x, y+\Delta y, z) + \gamma']\,\Delta z,$$

$\beta'$ s'évanouissant avec $\Delta x$ et $\Delta y$, et $\gamma'$ avec $\Delta x$, $\Delta y$ et $\Delta z$.

Si l'on ajoute la première équation avec les deux dernières, il vient

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x, y, z) = [\varphi(x, y, z) + \alpha]\Delta x + [\psi(x+\Delta x, y, z) + \beta']\,\Delta y + [\chi(x+\Delta x, y+\Delta y, z) + \gamma']\,\Delta z,$$

ou, en désignant par $\beta''$ et $\gamma''$ de nouvelles fonctions qui tendent vers o,

$$\Delta u = \varphi(x, y, z)\,\Delta x + \psi(x, y, z)\,\Delta y + \chi(x, y, z)\,\Delta z + \alpha\,\Delta x + \beta''\,\Delta y + \gamma''\,\Delta z.$$

Ainsi l'accroissement de la fonction $u$ se compose de deux parties : dans l'une, les accroissements des variables sont multipliés par des fonctions indépendantes de ces

accroissements, et qui sont les dérivées partielles de $u$; dans l'autre, ces accroissements sont multipliés par des quantités $\alpha$, $\beta''$, $\gamma''$ qui s'évanouissent en même temps qu'eux. Dans le cas où les variables indépendantes se réduisent à une seule, la première partie se nomme différentielle de la fonction. Il est donc naturel de donner, dans tous les cas, à cette première partie, le nom de différentielle totale.

**94.** Voici quelques exemples de différentielles totales :

1°. $$u = x^m y^n, \quad du = mx^{m-1} y^n dx + nx^m y^{n-1} dy.$$

2°. $$u = \frac{ay}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$du = \frac{a\sqrt{x^2 + y^2} \,.\, dy - ay\, d\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2};$$

et comme $$d\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

il vient $$du = \frac{-\,axy\,dx + ax^2\,dy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

3°. $$u = \text{arc tang}\,\frac{y}{x},$$

$$du = \frac{d.\frac{y}{x}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}.$$

PROPRIÉTÉS DE LA DIFFÉRENTIELLE TOTALE,

**95.** Nous avons vu, au commencement du Cours, que la limite du rapport de l'accroissement d'une fonction d'une seule variable à sa différentielle est l'unité (pourvu que la différentielle ne soit pas nulle). Le même théorème a lieu pour les fonctions de plusieurs variables indépendantes.

On a, d'après la définition de la différentielle totale,

$$du = \varphi(x,y,z)\,\Delta x + \psi(x,y,z)\,\Delta y + \chi(x,y,z)\,\Delta z,$$

par conséquent (93),

$$\Delta u - du = \alpha\,\Delta x + \beta''\,\Delta y + \gamma''\,\Delta z;$$

puis, en divisant par $du$, on a

$$\frac{\Delta u}{du} - 1 = \frac{\alpha\,\Delta x + \beta''\,\Delta y + \gamma''\,\Delta z}{\varphi(x,y,z) + \psi(x,y,z)\frac{\Delta y}{\Delta x} + \chi(x,y,z)\frac{\Delta z}{\Delta x}}.$$

Lorsque $\Delta x$, $\Delta y$, $\Delta z$, deviennent infiniment petits, le numérateur tend vers zéro, mais le dénominateur ne devient pas infiniment petit, tant que l'un au moins des rapports $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ reste arbitraire. La limite de $\frac{\Delta u}{du}$ est donc l'unité, si les valeurs des accroissements $\Delta x$, $\Delta y$, $\Delta z$, n'annulent pas $du$.

96. Comme pour les fonctions d'une seule variable, *si une fonction de plusieurs variables est constante, sa différentielle est nulle.*

En effet, la dérivée de cette fonction par rapport à chaque variable est nulle, par conséquent sa différentielle totale, qui est $\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz$, est nulle aussi.

On en conclut que si deux fonctions ont une différence constante, leurs différentielles partielles ou totales sont égales, et réciproquement. Car si $u = v + c$, $c$ étant une constante, on a

$$u - v = c,$$

d'où $d(u - v)$ ou $du - dv = 0$ et $du = dv$.

Et réciproquement, si $du = dv$, on a

$$d(u - v) = 0,$$

d'où

$$u - v = \text{une constante}.$$

### DIFFÉRENTIATION D'UNE FONCTION COMPOSÉE DE FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES INDÉPENDANTES.

**97.** Si l'on a une fonction composée de deux ou de plusieurs fonctions des variables indépendantes $x, y, z$, comme $p = \mathrm{F}(u, v)$, on aura en différentiant tour à tour par rapport à chaque variable,

$$\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{du}\frac{du}{dx} + \frac{dp}{dv}\frac{dv}{dx},$$

$$\frac{dp}{dy} = \frac{dp}{du}\frac{du}{dy} + \frac{dp}{dv}\frac{dv}{dy},$$

$$\frac{dp}{dz} = \frac{dp}{du}\frac{du}{dz} + \frac{dp}{dv}\frac{dv}{dz};$$

$\frac{dp}{du}, \frac{dp}{dv}$, désignant les dérivées de $p$ ou de $\mathrm{F}(u, v)$ prises par rapport à chacune des quantités $u$ et $v$, comme si $u$ et $v$ étaient des variables indépendantes.

En multipliant les dérivées $\frac{dp}{dx}, \frac{dp}{dy}, \frac{dp}{dz}$ par $dx$, $dy$, $dz$ respectivement et ajoutant, on aura la différentielle totale de $p$,

$$dp = \frac{dp}{du}du + \frac{dp}{dv}dv.$$

Les facteurs $du$ et $dv$ qui multiplient les dérivées partielles $\frac{dp}{du}, \frac{dp}{dv}$ désignent les différentielles totales de $u$ et de $v$. Ainsi le théorème relatif à la différentiation d'une fonction composée s'étend au cas de plusieurs variables indépendantes.

### DIFFÉRENTIELLES DES FONCTIONS IMPLICITES DE PLUSIEURS VARIABLES INDÉPENDANTES.

**98.** Soient, par exemple, les deux équations

(1) $f(x, y, z, u, v) = 0,$

(2) $\mathrm{F}(x, y, z, u, v) = 0.$

On peut choisir $x$, $y$, $z$ pour variables indépendantes : alors $u$ et $v$ seront des fonctions implicites de ces variables, déterminées par ces deux équations. Or, $f(x, y, z, u, v)$ et $F(x, y, z, u, v)$ ayant, pour toutes les valeurs des variables $x$, $y$, $z$, une valeur constante qui est zéro, leurs différentielles totales doivent être constamment nulles. On aura donc

$$\frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy + \frac{df}{dz}dz + \frac{df}{du}du + \frac{df}{dv}dv = 0,$$

$$\frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy + \frac{dF}{dz}dz + \frac{dF}{du}du + \frac{dF}{dv}dv = 0.$$

De ces deux équations on tirera facilement les valeurs de $du$ et de $dv$, qui s'y trouvent au premier degré.

## DÉRIVÉES ET DIFFÉRENTIELLES DE DIVERS ORDRES DES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES INDÉPENDANTES.

99. Soit

$$u = f(x, y, z)$$

une fonction des variables indépendantes $x$, $y$, $z$. Les règles de différentiation des fonctions d'une seule variable donnent immédiatement les dérivées successives $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}, \ldots, \frac{d^nu}{dx^n}$, puis $\frac{du}{dy}, \ldots, \frac{d^nu}{dy^n}$ et $\frac{du}{dz}, \ldots, \frac{d^nu}{dz^n}$.

Or toutes ces dérivées sont des fonctions de $x$, $y$ et $z$, que l'on peut différentier par rapport à l'une quelconque des variables. Ainsi l'on peut prendre $\frac{d\left(\frac{du}{dx}\right)}{dy}$, c'est-à-dire la dérivée par rapport à $y$ de la dérivée de $u$ par rapport à $x$.

Pour plus de clarté, on pourrait indiquer ces deux opérations successives par $\frac{d_y\left(\frac{du}{dx}\right)}{dy}$ ou $\frac{d_y d_x u}{dy\, dx}$, mais il

suffit d'écrire simplement $\frac{d\,du}{dy\,dx}$ ou $\frac{d^2u}{dy\,dx}$, parce que l'ordre des différentielles $dy$ et $dx$ au dénominateur indique suffisamment qu'il faut prendre d'abord la dérivée de $u$ par rapport à $x$, qui est $\frac{du}{dx}$, et ensuite la dérivée de $\frac{du}{dx}$ par rapport à $y$.

De même $\frac{d\frac{du}{dy}}{dx}$ ou $\frac{d^2u}{dx\,dy}$ exprimera la dérivée par rapport à $x$ de la dérivée de $u$ par rapport à $y$.

On indique d'une manière semblable le résultat d'un nombre quelconque de différentiations exécutées dans un certain ordre sur la fonction $u$, par rapport aux diverses variables qu'elle renferme. Ainsi, par exemple, $\frac{d^4u}{dz\,dx\,dy\,dx}$ signifie qu'il faut prendre d'abord $\frac{du}{dx}=u_1$, ensuite $\frac{du_1}{dy}=u_2$, puis $\frac{du_2}{dx}=u_3$, et enfin $\frac{du_3}{dz}=u_4$. Ce dernier résultat $u_4$ est ce qu'exprime la notation $\frac{d^4u}{dz\,dx\,dy\,dx}$.

### THÉORÈME SUR L'ORDRE DES DIFFÉRENTIATIONS.

100. *Le résultat final de plusieurs différentiations successives est toujours le même, quel que soit l'ordre dans lequel on opère par rapport aux diverses variables.*

Je dis d'abord que

$$\frac{d\frac{du}{dx}}{dy}=\frac{d\frac{du}{dy}}{dx} \quad \text{ou que} \quad \frac{d^2u}{dy\,dx}=\frac{d^2u}{dx\,dy}.$$

En effet, si l'on ne fait varier dans la fonction $u$ que $x$ et $y$, on peut, en faisant abstraction des autres variables, représenter $u$ par $f(x,y)$. Or on a

$$f(x+h,y)-f(x,y)=\left(\frac{du}{dx}+\alpha\right)h,$$

$\alpha$ étant une fonction de $x$, $y$ et $h$, qui tend vers zéro en même temps que $h$, quelle que soit la valeur qu'on donne à $y$.

Changeons dans cette équation $y$ en $y+k$. Le premier membre devient

$$f(x+h,y+k)-f(x,y+k).$$

Dans le second, $\frac{du}{dx}$ devient

$$\frac{du}{dx}+\frac{d\frac{du}{dx}}{dy}k+6k,$$

$6$ tendant vers zéro avec $k$; $\alpha$ prendra une nouvelle valeur de la forme $\alpha+\alpha' k$, $\alpha'$ ayant pour limite $\frac{d\alpha}{dy}$, si $k$ diminue jusqu'à zéro; cette nouvelle valeur devant encore devenir infiniment petite avec $h$, il faut que $\alpha'$ s'annule aussi avec $h$. On aura donc

$$f(x+h,y+k)-f(x,y+k)$$
$$=\left(\frac{du}{dx}+\frac{d\frac{du}{dx}}{dy}k+6k\right)h+(\alpha+\alpha' k)h.$$

En retranchant la première équation de la seconde, puis divisant par $hk$, il vient

$$\frac{f(x+h,y+k)-f(x,y+k)-f(x+h,y)+f(x,y)}{hk}$$
$$=\frac{d\frac{du}{dx}}{dy}+6+\alpha'.$$

On voit que le premier membre a pour limite $\frac{d\frac{du}{dx}}{dy}$, quand $h$ et $k$ décroissent indéfiniment.

Mais en faisant varier dans $f(x,y)$ d'abord $y$ et en-

suite $x$, on trouve que la même expression a pour limite $\frac{d\frac{du}{dy}}{dx}$ quand $h$ et $k$ tendent vers zéro.

Les deux limites doivent être égales; on a donc

$$\frac{d\frac{du}{dx}}{dy} = \frac{d\frac{du}{dy}}{dx} \quad \text{ou} \quad \frac{d^2 u}{dy\,dx} = \frac{d^2 u}{dx\,dy}.$$

Il est bon d'observer que cette quantité, à laquelle on parvient de deux manières différentes, équivaut aux deux expressions

$$\frac{\Delta_y \Delta_x u}{\Delta x\, \Delta y} \quad \text{et} \quad \frac{\Delta_x \Delta_y u}{\Delta x\, \Delta y},$$

de sorte qu'on a $\Delta_y \Delta_x u = \Delta_x \Delta_y u$,

aussi bien que $d_y d_x u = d_x d_y u$.

**101.** EXEMPLES. 1°. $u = x^m y^n$.

On a

$$\frac{du}{dx} = mx^{m-1} y^n, \quad \frac{du}{dy} = nx^m y^{n-1}:$$

$$\frac{d\frac{du}{dx}}{dy} \quad \text{ou} \quad \frac{d^2 u}{dy\,dx} = mnx^{m-1} y^{n-1},$$

$$\frac{d\frac{du}{dy}}{dx} \quad \text{ou} \quad \frac{d^2 u}{dx\,dy} = mnx^{m-1} y^{n-1} = \frac{d^2 u}{dy\,dx}.$$

2°. $$u = \text{arc tang}\,\frac{y}{x}.$$

$$du = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}:$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{du}{dy} = \frac{x}{x^2 + y^2}:$$

$$\frac{d^2 u}{dy\,dx} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{d^2 u}{dx\,dy}.$$

102. La proposition étant démontrée pour deux différentiations successives, il en résulte que si l'on avait à différentier une fonction plusieurs fois de suite par rapport à ses diverses variables et dans un certain ordre, on pourrait, sans changer le résultat final, intervertir l'ordre de deux différentiations consécutives. On peut donc amener chaque différentiation à tel rang qu'on voudra, c'est-à-dire intervertir à volonté l'ordre des différentiations successives; de même qu'on démontre qu'un produit reste le même, quel que soit l'ordre de ses facteurs, quand on a prouvé qu'on peut échanger deux facteurs consécutifs.

On aura, par exemple,

$$\frac{d^6 u}{dx\, dz\, dx\, dy\, dz\, dx} = \frac{d^6 u}{dz\, dz\, dy\, dx\, dx\, dx} = \frac{d^6 u}{dz^2\, dy\, dx^3}.$$

DIFFÉRENTIELLES TOTALES DE DIVERS ORDRES D'UNE FONCTION DE PLUSIEURS VARIABLES INDÉPENDANTES.

103. Soit $u$ une fonction de trois variables indépendantes $x$, $y$, $z$, et proposons-nous d'en calculer les différentielles totales $du$, $d^2 u$, $d^3 u$, etc.

La différentielle première est

$$du = \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} dz.$$

On aura la différentielle totale de $du$ ou la différentielle totale et du second ordre de $u$, en prenant la différentielle totale de chaque terme de $du$, ce qui donne, en observant que $\frac{d^2 u}{dy\, dx} = \frac{d^2 u}{dx\, dy}$, etc.,

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{d^2 u}{dx^2} dx + \frac{d^2 u}{dx\, dy} dy + \frac{d^2 u}{dx\, dz} dz\right) dx \\
+ &\left(\frac{d^2 u}{dx\, dy} dx + \frac{d^2 u}{dy^2} dy + \frac{d^2 u}{dy\, dz} dz\right) dy \\
+ &\left(\frac{d^2 u}{dx\, dz} dx + \frac{d^2 u}{dy\, dz} dy + \frac{d^2 u}{dz^2} dz\right) dz,
\end{aligned}$$

ou

$$d^2 u = \frac{d^2 u}{dx^2} dx^2 + \frac{d^2 u}{dy^2} dy^2 + \frac{d^2 u}{dz^2} dz^2 + 2 \frac{d^2 u}{dx\, dy} dx\, dy + 2 \frac{d^2 u}{dx\, dz} dx\, dz + 2 \frac{d^2 u}{dy\, dz} dy\, dz.$$

On voit que $d^2 u$ peut se former en élevant au carré la différentielle première $\frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} dz$, pourvu qu'au numérateur de chaque terme du carré développé on remplace $du^2$ par $d^2 u$. Avec cette convention, on peut écrire la formule symbolique

$$d^2 u = \left(\frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} dz\right)^{(2)}.$$

On aura de même, en général,

$$d^n u = \left(\frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} dz\right)^{(n)}.$$

l'exposant entre parenthèses indiquant qu'il s'agit d'une formule symbolique, c'est-à-dire d'une expression dans laquelle il faudra remplacer $du^n$ par $d^n u$ après le développement.

On démontre la généralité de cette formule en prouvant que, si elle est vraie pour un certain indice $n$, elle est encore vraie pour l'indice $n+1$.

En effet, un terme quelconque du développement symbolique de $d^n u$ est de la forme

$$(1) \qquad k \frac{du^n}{dx^p\, dy^q\, dz^r} dx^p\, dy^q\, dz^r,$$

où

$$p + q + r = n,$$

et

$$k = \frac{1.2.3\ldots n}{1.2\ldots p \times 1.2\ldots q \times 1.2\ldots r}.$$

Le terme correspondant dans $d^n u$ est

$$(2) \qquad k \frac{d^n u}{dx^p\, dy^q\, dz^r} dx^p\, dy^q\, dz^r.$$

On aura $d^{n+1} u$ en prenant la différentielle totale de

chaque terme de $d^n u$. Or la différentielle totale du terme (2) peut s'obtenir en multipliant sa valeur symbolique (1) par l'expression

$$(3) \qquad \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz,$$

pourvu qu'après le développement du produit on change $du^{n+1}$ en $d^{n+1}u$. Donc la différentielle totale de $d^n u$ ou $d^{n+1}u$ s'obtiendra en multipliant par l'expression (3) la valeur symbolique de $d^n u$ qui, par hypothèse, est la puissance $n^{ième}$ de la même expression. On aura donc aussi la formule symbolique

$$d^{n+1}u = \left(\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz\right)^{(n+1)}.$$

DÉRIVÉES PARTIELLES DES FONCTIONS IMPLICITES.

**104.** On a vu que si l'on a une équation $f(x, y) = 0$ entre deux variables $x$ et $y$, on en tire

$$\frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy = 0, \quad \text{d'où} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}}.$$

On peut aussi exprimer les dérivées suivantes $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, etc., par les dérivées partielles des divers ordres de $f(x, y)$, car en différentiant par rapport à $x$ l'équation $\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dx} = 0$, $dx$ étant regardée comme constante, on trouve

$$\frac{d^2f}{dx^2} + 2\frac{d^2f}{dx\,dy}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{d^2f}{dy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{df}{dy}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} = 0;$$

d'où l'on tire $\frac{d^2y}{dx^2}$. En différentiant de nouveau, on obtiendra de même $\frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d^4y}{dx^4}, \ldots$

**105.** Si l'on a une seule équation entre trois variables

$$f(x, y, z) = 0,$$

deux quelconques d'entre elles $x$ et $y$ sont indépendantes, et la troisième $z$ est une fonction déterminée de celles-ci. On peut trouver les dérivées successives de $z$ de la manière suivante.

En différentiant l'équation $f(x, y, z) = 0$ par rapport à $x$, dont $z$ est une fonction, on a

(1) $$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = 0;$$

d'où l'on tire $\frac{dz}{dx}$.

On a de même

(2) $$\frac{df}{dy} + \frac{df}{dz} \cdot \frac{dz}{dy} = 0,$$

équation qui donne la valeur de $\frac{dz}{dy}$.

En différentiant (1) par rapport à $x$, on aura

$$\frac{d^2f}{dx^2} + 2\frac{d^2f}{dx\,dz} \cdot \frac{dz}{dx} + \frac{d^2f}{dz^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \frac{df}{dz} \cdot \frac{d^2z}{dx^2} = 0;$$

d'où l'on tire $\frac{d^2z}{dx^2}$.

En différentiant (1) par rapport à $y$ ou (2) par rapport à $x$, on trouve également

$$\frac{d^2f}{dx\,dy} + \frac{d^2f}{dy\,dz} \cdot \frac{dz}{dx} + \frac{d^2f}{dx\,dz} \cdot \frac{dz}{dy} + \frac{d^2f}{dz^2} \cdot \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dz}{dy} + \frac{df}{dz} \cdot \frac{d^2z}{dx\,dy} = 0;$$

d'où l'on déduira $\frac{d^2z}{dx\,dy}$.

Enfin, en différentiant (2) par rapport à $y$, on aura

$$\frac{d^2f}{dy^2} + 2\frac{d^2f}{dy\,dz} \cdot \frac{dz}{dy} + \frac{d^2f}{dz^2}\left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + \frac{df}{dz}\frac{d^2z}{dy^2} = 0,$$

équation qui fera connaître $\frac{d^2z}{dy^2}$. On trouverait de même $\frac{d^3z}{dx^3}$, $\frac{d^3z}{dx^2\,dy}$, ....

**106.** Par exemple, l'équation de la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$$

donne

$$x + z\frac{dz}{dx} = 0, \quad y + z\frac{dz}{dy} = 0,$$

$$1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + z\frac{d^2z}{dx^2} = 0, \quad 1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + z\frac{d^2z}{dy^2} = 0,$$

$$\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy} + z\frac{d^2z}{dx\,dy} = 0;$$

d'où l'on tire

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{x}{z}, \quad \frac{dz}{dy} = -\frac{y}{z},$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{x^2+z^2}{z^3}, \quad \frac{d^2z}{dy^2} = -\frac{y^2+z^2}{z^3}, \quad \frac{d^2z}{dx\,dy} = -\frac{xy}{z^3}.$$

# HUITIÈME LEÇON.

*Applications analytiques du Calcul différentiel.* — Démonstration de la série de Taylor. — Remarques sur l'emploi de cette formule. — Autres formes du reste. — Série de Maclaurin. — Remarques sur la série de Maclaurin. — Développement des fonctions exponentielles. — Développement de $\sin x$ et de $\cos x$.

---

## DÉMONSTRATION DE LA SÉRIE DE TAYLOR.

**107.** On a vu, dans l'*Algèbre élémentaire*, que si l'on change $x$ en $x+h$ dans une fonction entière de la variable $x$, qu'on désigne par $f(x)$, on peut développer $f(x+h)$ en une suite de termes ordonnés suivant les puissances entières et positives de l'accroissement $h$, et qu'on a la formule

$$\left\{\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \ldots \\ &\quad + \frac{h^n}{1.2.3\ldots n} f^n(x) + \ldots, \end{aligned}\right.$$

$f'(x)$, $f''(x)$, etc., étant les fonctions dérivées successives de $f(x)$. Cette suite se termine d'elle-même et contient $m+1$ termes, quand $f(x)$ est une fonction entière dont le degré est $m$; car sa fonction dérivée de l'ordre $m$ est une quantité constante, et les dérivées des ordres supérieurs à $m$ sont nulles.

Nous allons voir comment la formule précédente peut s'étendre à une fonction quelconque $f(x)$ d'une variable $x$.

Représentons par R le reste qu'on obtient en retranchant de $f(x+h)$ la somme des $n+1$ premiers de la série

$$f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \ldots,$$

qui a un nombre indéfini de termes, quand $f(x)$ n'est plus une fonction entière; on aura

$$(1)\quad \begin{cases} R = f(x+h) - f(x) - hf'(x) - \frac{h^2}{1.2}f''(x) - \ldots \\ \quad - \frac{h^n}{1.2.3\ldots n}f^{(n)}(x). \end{cases}$$

Faisons maintenant $x + h = z$, d'où résulte $h = z - x$ et nous aurons

$$(2)\quad \begin{cases} R = f(z) - f(x) - (z-x)f'(x) - \frac{(z-x)^2}{1.2}f''(x) - \ldots \\ \quad - \frac{(z-x)^n}{1.2.3\ldots n}f^{(n)}(x); \end{cases}$$

R dépend, comme on voit, de $x$, de $z$ et de $n$.

Comme $x$ et $z$ sont deux quantités indéterminées et indépendantes l'une de l'autre, on peut faire varier $x$ en laissant $z$ constant et prendre la différentielle ou la dérivée de R par rapport à la variable $x$. On aura

$$\begin{cases} \frac{dR}{dx} = -f'(x) - (z-x)f''(x) - \frac{(z-x)^2}{1.2}f'''(x) \\ \quad - \frac{(z-x)^3}{1.2.3}f^{\text{IV}}(x) - \ldots - \frac{(z-x)^n}{1.2.3\ldots n}f^{(n+1)}(x) \\ \quad + f'(x) + (z-x)f''(x) + \frac{(z-x)^2}{1.2}f'''(x) + \ldots \\ \quad + \frac{(z-x)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n)}(x); \end{cases}$$

tous les termes se détruisent, excepté le dernier terme du second membre, de sorte qu'on a simplement

$$(3)\qquad \frac{dR}{dx} = -\frac{(z-x)^n}{1.2.3\ldots n}f^{(n+1)}(x).$$

Cette formule va nous servir à déterminer deux limites entre lesquelles le reste R sera compris.

Si l'on remplace $f^{(n+1)}(x)$, dans le second membre, par

une constante arbitraire C, on aura

$$\frac{d}{dx}\cdot\frac{(z-x)^{n+1}}{1.2.3\ldots n(n+1)}C = -\frac{(z-x)^n}{1.2.3\ldots n}C.$$

En retranchant cette équation de la précédente, on trouve

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\left[R-\frac{(z-x)^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)}C\right] \\ &\qquad = \frac{(z-x)^n}{1.2.3\ldots n}\left[C-f^{(n+1)}(x)\right], \end{aligned}\right.$$

équation qui a lieu quelles que soient $x$ et $z$.

108. 1°. Supposons à présent $x < z$ ou $h$ positive (puisque $h = z - x$) et admettons qu'en faisant croître $x$ depuis une valeur quelconque plus petite que $z$ jusqu'à la valeur $z$, la fonction $f^{(n+1)}(x)$ reste finie et continue, ou, en d'autres termes, varie par degrés insensibles. Désignons par M la plus grande et par $m$ la plus petite des valeurs que prendra cette fonction. En remplaçant C par M dans l'équation ci-dessus, le second membre sera positif ou du moins ne sera jamais négatif pour les valeurs de $x$ croissantes jusqu'à $z$. Ainsi l'on aura

$$\frac{d}{dx}\left[R-\frac{(z-x)^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)}M\right] > 0.$$

Donc, tandis que $x$ croît jusqu'à $z$, la fonction

$$R-\frac{(z-x)^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)}M$$

croît aussi continuellement, puisque sa dérivée reste positive (ou plutôt ne devient pas négative). Mais cette fonction $R-\frac{(z-x)^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)}M$ est nulle quand $x$ devient égale à $z$ [car alors R est nulle, formule (2)]. Donc elle est négative pour les valeurs de $x$ moindres que $z$, et par conséquent on a

$$R < \frac{(z-x)^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)}M.$$

Si dans la même équation on remplace C par $m$, qui est la plus petite valeur de $f^{(n+1)}(x)$, il vient

$$\frac{d}{dx}\left[R - \frac{(z-x)^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)}m\right] < 0.$$

Donc, en faisant croître $x$ depuis une valeur quelconque jusqu'à $z$, la fonction $R - \frac{(z-x)^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)}m$ décroît, puisque sa dérivée est négative; et comme cette fonction s'annule quand $x$ atteint la valeur $z$, elle doit être positive pour les valeurs de $x < z$. On a donc

$$R > \frac{(z-x)^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)}m.$$

Voilà deux limites de R.

2°. Supposons maintenant $x > z$ ou $h$ négative, et désignons toujours par M et $m$ la glus grande et la plus petite valeur que prendra $f^{(n+1)}(x)$, si l'on fait croître $x$ depuis la valeur $z$ jusqu'à une autre valeur quelconque plus grande que $z$. En remplaçant la constante C tour à tour par M et $m$ dans l'équation (4), on aura, si le nombre $n$ est pair,

$$\frac{d}{dx}\left[R - \frac{(z-x)^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)}M\right] > 0,$$

$$\frac{d}{dx}\left[R - \frac{(z-x)^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)}m\right] < 0.$$

Donc, en faisant croître $x$ depuis $z$ jusqu'à une valeur quelconque, la fonction $R - \frac{(z-x)^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)}M$, qui est d'abord nulle pour $x = z$, croît en même temps que $x$, et par conséquent est positive. On a donc

$$R > \frac{(z-x)^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)}M,$$

et l'on trouve de même

$$R < \frac{(z-x)^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)}m.$$

Si $n$ est un nombre impair, on trouvera les mêmes limites de R, mais prises dans l'ordre inverse, et par conséquent les deux inégalités seront les mêmes que dans le cas où $x$ était $< z$.

On remarquera qu'en supposant $x > z$, le facteur $(z-x)^{n+1}$ est négatif ou positif, selon que $n$ est pair ou impair.

109. Il résulte de ce qui précède qu'on a, dans tous les cas,

$$R = \frac{(z-x)^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)} K,$$

en désignant par K une quantité comprise entre M et $m$.

Donnons maintenant à $x$ une valeur fixe arbitraire, et désignons par $x'$ une variable qui reste comprise entre les deux valeurs déterminées $x$ et $z$ ou $x$ et $x+h$. La fonction $f^{(n+1)}(x')$ qui, par hypothèse, reste finie et continue quand $x'$ varie depuis $x$ jusqu'à $x+h$, passera successivement par tous les états de grandeur intermédiaires entre sa plus grande et sa plus petite valeur, entre M et $m$; elle deviendra donc égale à la quantité K, qui tombe entre M et $m$, pour une certaine valeur de la variable $x'$ comprise entre les valeurs extrêmes $x$ et $x+h$. On pourra représenter cette valeur de $x'$ par $x+\theta h$, $\theta$ étant un nombre positif plus petit que l'unité et d'ailleurs inconnu, de sorte qu'on aura

$$f^{(n+1)}(x+\theta h) = K.$$

L'expression précédente de R deviendra donc

$$(5) \qquad R = \frac{h^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)} f^{(n+1)}(x+\theta h),$$

en l'égalant à son expression primitive (1), on aura enfin *la formule de Taylor*

$$(6) \quad \begin{cases} f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \dfrac{h^2}{1.2} f''(x) + \ldots \\ + \dfrac{h^n}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}(x) + \dfrac{h^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)} f^{(n+1)}(x+\theta h); \end{cases}$$

la quantité $h$ est à volonté positive ou négative.

Cette formule a lieu pourvu que $f^{(n+1)}(x')$ reste finie et continue pour toutes les valeurs de la variable $x'$, depuis la valeur $x$ que l'on considère dans la formule jusqu'à $x+h$. Car alors chacune des fonctions précédentes $f(x')$, $f'(x')$, etc., sera aussi finie et continue pour $x'=x$, et pour toutes les autres valeurs de $x'$ comprises entre $x$ et $x+h$.

Les fonctions dérivées d'ordre supérieur à $n+1$ ne sont assujetties à aucune condition.

AUTRES FORMES DU RESTE.

**110.** Si l'on sait seulement que la fonction $f^{(n)}(x')$ est finie et continue quand $x'$ varie depuis $x$ jusqu'à $x+h$, et qu'on n'ait pas la même certitude pour $f^{(n+1)}(x')$, on peut écrire

$$\left\{\begin{aligned} f(x+h) &= f(x)+hf'(x)+\ldots+\frac{h^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(x)\\ &\quad+\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}f^{(n)}(x+\theta h).\end{aligned}\right.$$

Ajoutant et retranchant $\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}f^{(n)}(x)$, on a

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} f(x+h) &= f(x)+hf'(x)+\ldots+\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}f^{(n)}(x)\\ &\quad+\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}[f^{(n)}(x+\theta h)-f^{(n)}(x)].\end{aligned}\right.$$

Le reste R qu'il faut ajouter à la somme des $n+1$ premiers termes de la série indéfinie

$$f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\ldots$$

pour avoir la valeur exacte de $f(x+h)$, prend donc cette nouvelle forme :

$$(8)\qquad R=\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}[f^{(n)}(x+\theta h)-f^{(n)}(x)].$$

Le nombre $\theta$ plus petit que l'unité qui entre dans les formules (7) et (8) n'a pas la même valeur que dans la formule (6).

La formule (7) suppose que $f^{(n)}(x')$ reste finie et con-

tinue pour toutes les valeurs de la variable $x'$, depuis $x$ jusqu'à $x+h$; elle n'exige aucune condition relative aux dérivées d'un ordre supérieur à $n$. Celles-ci pourraient devenir infinies ou discontinues pour des valeurs de $x'$ comprises entre $x$ et $x+h$, sans que la formule cessât d'être exacte. Ainsi, en donnant à $x$ une valeur particulière, ce développement (7) de $f(x+h)$ peut être exact quand on l'arrête à un certain terme, et devenir inexact si l'on voulait le pousser au delà.

Supposons, par exemple, qu'on ait

$$f(x)=\varphi(x)+(x-a)^{\mu}\psi(x),$$

$\mu$ étant un exposant positif fractionnaire ou incommensurable compris entre les entiers $n$ et $n+1$. Les dérivées de $f(x)$ seront finies et continues pour $x=a$ jusqu'à $f^{(n)}(x)$ inclusivement, en supposant que les dérivées de $\varphi(x)$ et de $\psi(x)$ le soient; mais au delà elles deviendront infinies pour $x=a$. Le développement de $f(a+h)$ ne devra donc être poussé que jusqu'au terme $\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}f^{(n)}(a)$, tout au plus, et on le complétera en lui ajoutant le reste

$$\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}[f^{(n)}(a+\theta h)-f^{(n)}(a)]$$

qui est une fonction continue de $h$.

**111.** Le reste R de la série de Taylor peut encore être mis sous une autre forme, qui est utile en certains cas.

En désignant par $\varphi(x)$ une fonction quelconque de $x$, on a, d'après la formule (6),

$$\varphi(x+h)=\varphi(x)+h\varphi'(x+\theta h),$$

ou, en remettant $z-x$ à la place de $h$,

$$\varphi(z)=\varphi(x)+(z-x)\varphi'[(x+\theta(z-x)];$$

mais si $\varphi(x)$ représente le reste R, on a

$$\varphi(z)=0 \quad \text{et} \quad \varphi'(x)=\frac{-(z-x)^n}{1.2.3\ldots n}f^{(n+1)}(x),$$

formule (3), de sorte que l'équation précédente devient

$$\varphi(x) \quad \text{ou} \quad R = (z-x)\frac{[z-x-\theta(z-x)]^n}{1.2.3\ldots n} f^{n+1}[x+\theta(z-x)]$$

ou

$$(9) \qquad R = \frac{h^{n+1}(1-\theta)^n}{1.2.3\ldots n} f^{(n+1)}(x+\theta h);$$

$\theta$ est toujours un nombre positif plus petit que l'unité, dont la valeur n'est pas la même que dans les formules (6) et (7).

### REMARQUE SUR LA SÉRIE DE TAYLOR.

**112.** Si l'on arrête la série de Taylor à un terme quelconque $\frac{h^n}{1.2.3..n} f^{(n)}(x)$ qui ne soit pas nul, on pourra toujours prendre la quantité $h$ assez petite pour que ce terme surpasse en valeur absolue *le reste* qu'il faudrait ajouter à la somme

$$f(x) + hf'(x) + \ldots + \frac{h^n}{1.2.3..n} f^{(n)}(x)$$

afin d'avoir la valeur exacte de $f(x+h)$.

En effet, si l'on prend la seconde forme du reste (8), pour que le terme qui contient $h^n$ surpasse le *reste* correspondant, il faut qu'on ait (en ne considérant que la valeur absolue de chaque facteur)

$$\frac{h^n}{1.2.3..n} f^{(n)}(x) > \frac{h^n}{1.2.3..n}[f^{(n)}(x+\theta h) - f^{(n)}(x)]$$

ou simplement

$$f^{(n)}(x) > f^{(n)}(x+\theta h) - f^{(n)}(x).$$

Cette condition sera toujours remplie, en prenant $h$ suffisamment petit, si $f^{(n)}(x)$ n'est pas zéro et si $f^{(n)}(x')$ reste finie et continue pour toutes les valeurs de $x'$ comprises entre $x$ et $x+h$, puisqu'alors la différence $f^{(n)}(x+\theta h) - f^{(n)}(x)$ tend vers zéro en même temps que $h$.

On voit même que le rapport du reste R au terme en $h^n$ où l'on a arrêté la série tend vers zéro à mesure que $h$ diminue.

SÉRIE DE MACLAURIN.

**113.** Si l'on fait $x = 0$ dans les équations (6), (7) et dans celle qu'on obtiendrait en substituant l'expression (9) de R et qu'on remplace ensuite la lettre $h$ par la lettre $x$, on obtiendra les formules

$$(10)\quad \begin{cases} f(x) = f(0) + xf'(0) + \dfrac{x^2}{1.2}f''(0) + \ldots + \dfrac{x^n}{1.2.3\ldots n}f^{(n)}(0) + \dfrac{x^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)}f^{(n+1)}(\theta x), \\ f(x) = f(0) + xf'(0) + \dfrac{x^2}{1.2}f''(0) + \ldots + \dfrac{x^n}{1.2.3\ldots n}f^{(n)}(0) + \dfrac{x^n}{1.2.3\ldots n}[f^{(n)}(\theta x) - f^{(n)}(0)], \\ f(x) = f(0) + xf'(0) + \dfrac{x^2}{1.2}f''(0) + \ldots + \dfrac{x^n}{1.2.3\ldots n}f^{(n)}(0) + \dfrac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{1.2.3\ldots n}f^{(n+1)}(\theta x). \end{cases}$$

On développe ainsi une fonction quelconque de $x$ en une suite de termes ordonnés suivant les puissances entières et ascendantes de $x$, pourvu que la fonction dérivée de l'ordre $n+1$ ou celle de l'ordre $n$ de $f(x')$ reste finie et continue pour les valeurs de la variable $x'$ comprises entre 0 et $x$.

Si, lorsque $n$ croît indéfiniment, l'une des expressions

$$\frac{x^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)}f^{(n+1)}(\theta x)$$

ou

$$\frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{1.2.3\ldots n}f^{(n+1)}(\theta x)$$

tend vers zéro, du moins lorsque $x$ est au-dessous d'une certaine limite, la série

$$f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{1.2}f''(0) + \frac{x^3}{1.2.3}f'''(0) + \ldots$$

indéfiniment prolongée sera convergente, et, en outre, aura pour somme $f(x)$. Cette dernière formule est celle de *Maclaurin*.

Si elle était démontrée avant la formule de Taylor, on pourrait en déduire celle-ci, en considérant $f(x+h)$ comme une fonction de $h$ à développer suivant les puissances de $h$ par l'une des formules (10).

REMARQUES SUR LA FORMULE DE MACLAURIN.

**114.** La fonction $f(x)$ ne peut pas être développée suivant les puissances de $x$ par la formule de Maclaurin, quand cette fonction ou l'une de ses dérivées devient infinie ou discontinue pour $x=0$. Mais on peut alors la développer suivant les puissances de $x-a$, en changeant dans la formule de Taylor (6) $x$ en $a$ et $h$ en $x-a$, ce qui donne

$$(11)\begin{cases} f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1.2}f''(a)+\ldots \\ \quad +\frac{(x-a)^n}{1.2.3\ldots n}f^{(n)}(a)+\frac{(x-a)^n}{1.2.3..n}f^{(n+1)}(a+\theta h); \end{cases}$$

la seule condition à laquelle la valeur $a$ soit assujettie est que $f^{(n+1)}(x')$ reste finie et continue pour toutes les valeurs de $x'$ depuis $a$ jusqu'à $x$; la série sera d'autant plus convergente que la différence $x-a$ sera plus petite.

**115.** La fonction $f(x)$ ne peut être développée en une série convergente procédant suivant les puissances entières et ascendantes de $x$ autrement que par la formule de Maclaurin; car supposons cet autre développement en série convergente,

$$f(x)=A+Bx+Cx^2+Dx^3\ldots,$$

on en conclut

$$[A-f(0)]+[B-f'(0)]x+\left[C-\frac{f''(0)}{1.2}\right]x^2+\ldots=0.$$

En faisant $x=0$, on obtiendra successivement

$$A=f(0),\quad B=f'(0),\quad C=\frac{f''(0)}{1.2}.$$

De même la formule de Taylor donne le seul développement possible de $f(x+h)$ suivant les puissances entières de $h$.

**116.** Il ne faut pas croire que la série indéfinie de Maclaurin, quand elle est convergente, ait toujours pour

somme $f(x)$; la somme de ses termes peut converger vers une limite différente de $f(x)$.

Par exemple, la fonction $e^{-\frac{1}{x^2}}$ devient nulle ainsi que toutes ses dérivées pour $x = 0$; tous les termes de la série de Maclaurin appliquée à cette fonction sont donc nuls, et cependant la fonction n'est pas nulle. Si $\varphi(x)$ est une fonction développable par la formule de Maclaurin, et qu'on pose

$$f(x) = \varphi(x) + e^{-\frac{1}{x^2}},$$

la fonction $f(x)$, développée par la même formule, donnera lieu à une série convergente, mais qui aura pour somme $\varphi(x)$ et non pas la fonction développée $f(x)$.

L'égalité d'une fonction $f(x)$ à la série de Maclaurin prolongée à l'infini, ne peut être établie qu'en démontrant que le reste qu'il faut ajouter à la somme d'un nombre quelconque de termes de cette série pour avoir la valeur exacte de $f(x)$, devient plus petit que toute quantité donnée quand le nombre des termes croît jusqu'à l'infini.

Les mêmes remarques s'appliquent à la série de Taylor.

### DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS EXPONENTIELLES.

**117.** Nous allons développer quelques fonctions particulières en séries par la formule de Maclaurin.

Soit d'abord

$$f(x) = e^x.$$

Les fonctions dérivées sont toutes égales à $e^x$, et l'on a

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 1, \ldots, \quad f^{(n+1)}(\theta x) = e^{\theta x};$$

d'où

$$\left\{ \begin{aligned} e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} \\ + \frac{x^{n+1} e^{\theta x}}{1.2.3\ldots(n+1)}. \end{aligned} \right.$$

Le reste $\dfrac{x^{n+1} e^{\theta x}}{1.2.3\ldots(n+1)}$ peut devenir plus petit que

toute quantité donnée si l'on prend $n$ suffisamment grand. En effet, on peut écrire

$$\frac{x^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)} = \frac{x}{1}\cdot\frac{x}{2}\cdots\frac{x}{i}\times\frac{x}{i+1}\cdot\frac{x}{i+2}\cdots\frac{x}{n+1}.$$

Si l'on prend un nombre déterminé $k < 1$, on arrivera nécessairement à un facteur $\frac{x}{i+1} < k$; comme les facteurs vont en décroissant, le produit $\frac{x}{i+1}\cdot\frac{x}{i+2}\cdots\frac{x}{n+1}$ sera plus petit qu'une puissance de $k$ marquée par le nombre de ces facteurs, c'est-à-dire plus petit que $k^{n+1-i}$, et par conséquent aussi petit qu'on voudra, en prenant $n$ assez grand; donc le produit $\frac{x}{1}\cdot\frac{x}{2}\cdots\frac{x}{n+1}$, et par suite le reste $\frac{x^{n+1}\,e^{\theta x}}{1.2.3\ldots(n+1)}$ (puisque $e^{\theta x}$ reste fini), peut devenir plus petit que toute quantité donnée; d'où l'on conclut que la série $1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\ldots$ est convergente, et qu'elle a pour somme $e^x$.

**118.** On peut déduire de là le développement de $a^x$. En effet, si l'on observe que $a = e^{la}$, d'où $a^x = e^{x\,la}$, on obtient, en changeant dans le développement de $e^x$, $x$ en $x\,la$, et en remplaçant $e^{\theta\,la\,x}$ par $a^{\theta x}$,

$$\left\{\begin{aligned} a^x = 1 &+ \frac{x\,la}{1} + \frac{x^2(la)^2}{1.2} + \frac{x^3(la)^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{x^n(la)^n}{1.2\ldots n} \\ &+ \frac{x^{n+1}(la)^{n+1}}{1.2\ldots\,(n+1)}\,a^{\theta x}, \end{aligned}\right.$$

résultat qu'on aurait pu obtenir directement.

### DÉVELOPPEMENT DE $\sin x$ ET DE $\cos x$.

**119.** Soit

$$f(x) = \sin x;$$

on aura, en appelant $n$ un nombre *pair* quelconque,

$$f'(x) = \cos x,\quad f''(x) = -\sin x,\quad f'''(x) = -\cos x,$$
$$f^{\text{IV}}(x) = \sin x, \ldots,\quad f^{(n)}(x) = \mp \sin x,\quad f^{(n+1)}(x) = \pm \cos x;$$

d'où

$$f(0) = 0,\quad f'(0) = 1,\quad f''(0) = 0,\quad f'''(0) = 1, \ldots,$$
$$f^{(n)}(0) = 0,\quad f^{(n+1)}(\theta x) = \pm \cos(\theta x).$$

Il faudra prendre $+\cos(\theta x)$ ou $-\cos(\theta x)$, suivant que $n+1$ sera de la forme $4p+1$ ou $4p+3$. On aura donc

$$\left\{\begin{array}{l} \sin x = x - \dfrac{x^3}{1.2.3} + \dfrac{x^5}{1.2.3.4.5} \cdots \\ \pm \dfrac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} \mp \dfrac{x^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} \cos(\theta x). \end{array}\right.$$

Maintenant, en valeur absolue, $\cos(\theta x)$ est $< 1$. D'ailleurs on peut toujours prendre $n$ assez grand (nº **117**) pour que $\dfrac{x^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}$ devienne plus petit que toute quantité donnée. La série

$$x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \cdots,$$

est donc convergente et a pour somme $\sin x$.

Lorsque l'on aura $x > \dfrac{\pi}{2}$, le signe de $\cos(\theta x)$ dépendra de la valeur de $\theta$, et l'on ne pourra pas, en général, savoir le sens de l'erreur commise, lorsqu'on s'arrêtera à un terme d'un rang déterminé. Mais si, comme il arrive ordinairement, $x$ est $< \dfrac{\pi}{2}$, $\cos(\theta x)$ sera toujours positif, et l'erreur commise sera alternativement en plus et en moins.

**120.** Soit maintenant

$$f(x) = \cos x;$$

on aura, en appelant $n$ un nombre impair quelconque,

$$f'(x) = -\sin x, \quad f''(x) = -\cos x,$$
$$f'''(x) = \sin x, \quad f^{\text{IV}}(x) = \cos x, \ldots,$$
$$f^{(n)}(x) = \mp \sin x, \quad f^{(n+1)}(\theta x) = \mp \cos(\theta x);$$

on aura alors

$$\left\{\begin{aligned} &\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots \\ &\pm \frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} \mp \frac{x^{n+1}}{1.2.3..(n+1)} \cos(\theta x): \end{aligned}\right.$$

d'après ce que l'on a déjà démontré (117), on peut donc écrire, quel que soit $x$,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots$$

---

# NEUVIÈME LEÇON.

*Suite des applications de la série de Maclaurin.* — Formule du binôme pour un exposant quelconque. — Développement de log $(1+x)$. — Formules pour le calcul des logarithmes. — Des logarithmes considérés comme limites de fonctions algébriques. — Seconde démonstration de la série de Taylor.

## FORMULE DU BINÔME POUR UN EXPOSANT QUELCONQUE.

**121.** Proposons-nous de développer $(a+b)^m$, $m$ étant quelconque. On a, en posant $\frac{b}{a}=x$,

$$(a+b)^m=[a(1+x)]^m=a^m(1+x)^m.$$

La question étant ramenée à développer $(1+x)^m$, soit

$$f(x)=(1+x)^m;$$

on aura

$$f'(x)=m(1+x)^{m-1},\quad f''(x)=m(m-1)(1+x)^{m-2},\ldots,$$
$$f^{(n)}(x)=m(m-1)\ldots(m-n+1)(1+x)^{m-n},$$
$$f^{(n+1)}(\theta x)=m(m-1)\ldots(m-n)(1+\theta x)^{m-n-1}\ldots,$$

et, par suite,

$$\left\{\begin{aligned}(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\ldots\\ +\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}x^{m-n}\\ +\frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{1.2.3..(n+1)}x^{n+1}(1+\theta x)^{m-n-1}.\end{aligned}\right.$$

**122.** Supposons d'abord que l'on ait, en valeur absolue, $x>1$; je dis que dans ce cas la série sera divergente. En effet, on a pour l'expression de deux termes

consécutifs,

$$u_{p+1} = \frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2.3\ldots p}x^p,$$

$$u_p = \frac{m(m-1)\ldots(m-p+2)}{1.2.3\ldots(p-1)}x^{p-1},$$

par suite, $$\frac{u_{p+1}}{u_p} = \left(\frac{m+1}{p} - 1\right)x.$$

Comme ce rapport, à mesure que $p$ augmente, tend vers $x$, et que $x$ est $>1$, il s'ensuit que la série est divergente.

Quand au contraire $x$ est $<1$, en valeur absolue, la série est convergente et a pour somme $(1+x)^m$. Ici nous distinguerons deux cas :

1°. Supposons d'abord $x>0$, on aura

$$R = \frac{m(m-1)\ldots(m-n)x^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)} \times \left(\frac{1}{1+\theta x}\right)^{n+1-m}.$$

Le premier facteur peut se mettre sous la forme

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-i+1)x^i}{1.2.3\ldots i}$$

$$\times \frac{m-i}{i+1}x \cdot \frac{m-i-1}{i+2}x \cdot \ldots \frac{m-n}{n+1}x.$$

Ces derniers facteurs convergent vers $-x$ en prenant $i$ assez grand, et si $k$ est un nombre positif moindre que 1, mais plus grand que $x$, on peut supposer $i$ assez grand pour que chacun de ces facteurs soit moindre que $k$, abstraction faite du signe. Leur produit sera donc moindre que $k^{n+1-i}$, et par conséquent aussi petit qu'on voudra. Donc le produit total $\frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{1.2.3\ldots(n+1)}x^{n+1}$ sera aussi petit qu'on voudra en faisant croître $n$.

Quant au facteur $\left(\frac{1}{1+\theta x}\right)^{n+1-m}$, comme son exposant finit par être positif, il tend aussi vers 0, à moins toutefois que $\theta$ qui dépend de $n$ ne s'approche aussi indéfiniment de 0. Mais dans tous les cas ce facteur reste moindre que

l'unité. Par conséquent, le reste R de la série tend toujours vers o, quand $n$ croît. Donc la série représente $(1+x)^m$ pour toute valeur positive de $x$ plus petite que 1. Comme d'ailleurs le reste change de signe quand $n$ augmente d'une unité, les sommes successives de la série seront alternativement plus petites et plus grandes que $(1+x)^m$.

123. 2°. Si la valeur de $x$ est négative, rien ne prouve que le facteur $\left(\frac{1}{1+\theta x}\right)^{n+1-m}$ ne croîtra pas indéfiniment, et même il devra croître, à moins que $\theta$ ne tende vers o. Il faut alors recourir à l'autre forme du reste,

$$R = \frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{1.2.3\ldots n}x^{n+1}(1-\theta)^n(1+\theta x)^{m-n-1}:$$

on a donc en valeur absolue, si l'on pose $x = -z$,

$$R = \frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{1.2.3\ldots n}z^{n+1}(1-\theta)^n.\frac{(1-\theta z)^{m-1}}{(1-\theta z)^n},$$

ou

$$R = \frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{1.2.3\ldots n}z^{n+1}.\left(\frac{1-\theta}{1-\theta z}\right)^n.(1-\theta z)^{m-1}.$$

Le premier facteur tend encore vers o, quand $n$ augmente, d'après ce qui a été démontré ci-dessus.

D'un autre côté, comme on a $\frac{1-\theta}{1-\theta z} < 1$, $\left(\frac{1-\theta}{1-\theta z}\right)^n$ peut devenir plus petit que toute quantité déterminée, à moins que $\theta$ ne tende vers o, et dans ce cas même ce facteur est toujours plus petit que 1.

D'ailleurs $(1-\theta z)^{m-1}$ est $< 1$ si $m-1$ est positif, et $< \frac{1}{(1-z)^{1-m}}$ si $m-1$ est négatif : c'est donc, dans tous les cas, une quantité finie. Donc R peut devenir moindre que toute quantité donnée, si $n$ est assez grand.

Ainsi, en résumé, si $x$ tombe entre $-1$ et $+1$, on a, quel que soit $m$,

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3 + \ldots$$

## DÉVELOPPEMENT DE log $(1+x)$.

**124.** Soit

$$f(x) = \text{l}(1+x).$$

(On ne prend pas l$x$ parce que, pour $x = 0$, cette fonction et ses dérivées seraient infinies.) On aura

$$f'(x) = (1+x)^{-1}, f''(x) = -1(1+x)^{-2}, f'''(x) = 1.2(1+x)^{-3} \ldots$$

$$f^{(n)}(x) = \pm 1.2\ldots(n-1)(1+x)^{-n},$$

$$f^{(n+1)}(\theta x) = \mp 1.2.3\ldots n(1+\theta x)^{-n-1},$$

donc

$$\text{l}(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \mp \frac{x^n}{n} \pm \frac{x^{n+1}}{n+1} \times \frac{1}{(1+\theta x)^{n+1}}.$$

Le rapport d'un terme au précédent est, en valeur absolue, $\frac{p}{p+1}x$, et l'on voit que cette valeur converge vers $x$ quand $p$ augmente. Donc, d'après un théorème précédemment démontré, la série est divergente lorsque $x$ est $> 1$, en valeur absolue.

Supposons maintenant qu'on ait, en valeur absolue, $x < 1$. Nous allons démontrer que dans ce cas la série est toujours convergente et a pour somme l$(1+x)$.

1°. Soit d'abord $x$ positive; on a

$$\text{R} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^{n+1}.$$

$\frac{x}{1+\theta x}$ est une fraction proprement dite; sa puissance $(n+1)^{ième}$ pourra devenir plus petite que toute quantité donnée; et il en sera de même de R, *à fortiori*.

2°. Soit maintenant $x$ négative. Posons $x = -z$. On aura, abstraction faite du signe,

$$\text{R} = \frac{1}{n+1}\frac{z^{n+1}}{(1-\theta z)^{n+1}} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{z}{1-\theta z}\right)^{n+1}.$$

Mais, sous cette forme, on ne voit pas que le reste tende

vers o; prenons donc l'autre forme de R,

$$R = \frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{1.2.3\ldots n} f^{(n+1)}(\theta x) = x^{n+1}(1-\theta)^n \times \frac{1}{(1+\theta x)^{n+1}},$$

on aura

$$R = \left(\frac{z-\theta z}{1-\theta z}\right)^n \times \frac{z}{1-Cz}.$$

Or $\frac{z-\theta z}{1-\theta z}$ est $< z < 1$. Donc $\left(\frac{z-\theta z}{1-\theta z}\right)^n$ et par suite $\left(\frac{z-\theta z}{1-\theta z}\right)^n \times \frac{z}{1-\theta z}$ peut devenir plus petit que toute quantité donnée.

Ainsi, lorsque $x$ tombe entre $+1$ et $-1$, on a

(1) $$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

FORMULES POUR LE CALCUL DES LOGARITHMES.

**125.** On tire de cette série des formules très-commodes pour calculer les logarithmes népériens des nombres.

En effet, posons $x = \frac{h}{y}$; on aura

$$l(1+x) = l\left(1+\frac{h}{y}\right) = l(y+h) - ly;$$

d'où

$$l(y+h) - ly = \frac{h}{y} - \frac{1}{2}\left(\frac{h}{y}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{y}\right)^3 - \ldots$$

Si $h = 1$, on aura

$$l(y+1) - ly = \frac{1}{y} - \frac{1}{2y^2} + \frac{1}{3y^3} - \ldots,$$

formule qui donnera $l(y+1)$ au moyen de celui de $y$, et d'une série qui est très-convergente lorsque $y$ est un nombre très-grand.

Cependant on peut encore obtenir une série plus commode. On a, en changeant $x$ en $-x$ dans la formule (1),

$$l(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots;$$

donc

$$l(1+x) - l(1-x) = l\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right).$$

Posons $\frac{1+x}{1-x} = 1 + \frac{h}{y}$; on en tire $x = \frac{h}{2y+h}$, et comme

$l\left(1+\frac{h}{y}\right) = l(y+h) - ly$, on aura

$$(2)\ l(y+h) - ly = 2\left[\frac{h}{2y+h} + \frac{1}{3}\frac{h^3}{(2y+h)^3} + \ldots\right].$$

C'est au moyen de cette série que l'on calcule $l\,10$. Pour cela on fait d'abord $y = 1$, $h = 1$, et l'on a

$$l\,2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} + \ldots\right),$$

puis

$$l\,4 = 2\,l\,2,\quad l\,5 = l\,4 + 2\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3.9^3} + \ldots\right).$$

De là on déduit

$$l\,10 = l\,2 + l\,5 = 2,3025818,$$

et, par suite, le module du système décimal

$$\frac{1}{l\,10} = 0,434294482 = \log \text{tab. } e.$$

**126.** Posons

$$y = x^4 - 25x^2 \quad \text{et} \quad y + h = x^4 - 25x^2 + 144,$$

ou

$$y = x^2(x+5)(x-5),$$

$$y + h = (x+4)(x-4)(x+3)(x-3).$$

En substituant ces valeurs de $y$ et de $h$ dans la formule (2), on a

$$l(x+4) + l(x-4) + l(x+3) + l(x-3) - 2lx - l(x+5) - l(x-5)$$

$$= 2\left[\frac{72}{x^4 - 25x^2 + 72} + \frac{1}{3}\left(\frac{72}{x^4 - 25x^2 + 72}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{72}{x^4 - 25x^2 + 72}\right)^5 + \ldots\right].$$

Lorsque $x$ est très-grande, le second membre de cette égalité est très-petit. En effet, si l'on a par exemple $x > 1000$, le terme $\frac{72}{x^4 - 25x^2 + 72}$ sera plus petit que $\frac{1}{10^{10}}$, car

$$\frac{72}{x^4 - 25x^2 + 72} < \frac{72}{x^2(x^2 - 25)} < \frac{72}{10^6(10^6 - 25)} < \frac{1}{10^{10}} \cdot \frac{72}{10^2 - \frac{25}{10^4}}.$$

Les autres termes de la série seront beaucoup plus petits et décroîtront même très-rapidement; par conséquent, si l'on avait $x = 1000$, ou un nombre supérieur, on pourrait, avec une erreur moindre que $\frac{1}{10^{10}}$, poser

$$\begin{aligned} &\mathrm{l}(x+4) + \mathrm{l}(x-4) + \mathrm{l}(x+3) + \mathrm{l}(x-3) \\ &\quad - 2\,\mathrm{l}x - \mathrm{l}(x+5) - \mathrm{l}(x-5) = 0, \end{aligned}$$

formule qui donnerait l'un quelconque de ces logarithmes lorsque les autres seraient connus. Il est facile d'obtenir une multitude de formules de cette espèce.

**127.** La série de Taylor peut servir à démontrer que si deux nombres sont supérieurs à une certaine limite, telle que 10 000, la différence entre ces deux nombres, pourvu qu'elle soit suffisamment petite, qu'elle ne surpasse pas 1 par exemple, est sensiblement proportionnelle à la différence de leurs logarithmes.

En effet, comme $\mathrm{l}(1+x) = \frac{x}{1+\theta x}$, en s'arrêtant au premier terme, dans la série de Taylor, on a,

si $x = \frac{h}{y}$, $\quad \mathrm{l}(y+h) - \mathrm{l}y = \frac{h}{y+\theta h}$,

si $h = 1$, $\quad \mathrm{l}(y+1) - \mathrm{l}y = \frac{1}{y+\theta'}$;

donc $\quad \frac{\mathrm{l}(y+h) - \mathrm{l}y}{\mathrm{l}(y+1) - \mathrm{l}y} = h\,\frac{y+\theta'}{y+\theta h}$.

Comme il n'entre ici que des rapports de logarithmes, on peut écrire, dans un système quelconque,

$$\frac{\log(y+h)-\log y}{\log(y+1)-\log y}=h\frac{y+\theta'}{y+\theta h},$$

puisque, dans deux systèmes différents, les logarithmes des mêmes nombres sont proportionnels.

Or $\quad \frac{y+\theta'}{y+\theta h}<\frac{y+1}{y}, \quad \text{ou} \quad <1+\frac{1}{y},$

de même $\quad \frac{y+\theta'}{y+\theta h}>\frac{y}{y+1}, \quad \text{ou} \quad >1-\frac{1}{y+1}.$

Donc $$\frac{y+\theta'}{y+\theta h}=1\pm\omega,$$

$\omega$ étant plus petit que $\frac{1}{y}$; par suite,

$$\frac{\log(y+h)-\log y}{\log(y+1)-\log y}=h(1\pm\omega);$$

donc

$$\log(y+h)-\log y=[\log(y+1)-\log y]h \\ \pm\omega h[\log(y+1)-\log y].$$

Donc si l'on pose

$$\log(y+h)-\log y=[\log(y+1)-\log y]h,$$

l'erreur commise E sera

$$\omega h[\log(y+1)-\log y]=\omega h \log e[1(y+1)-1y],$$

ou, ce qui revient au même,

$$E=\omega h\log e\frac{1}{y+\theta'},$$

et comme on a

$$\omega<\frac{1}{y}, \quad \frac{1}{y+\theta'}<\frac{1}{y}, \quad \log e<\frac{1}{2}, \quad h<1,$$

on aura

$$E<\frac{1}{2}y^2<\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^8} \quad \text{si} \quad y>10\,000.$$

Réciproquement, on a

$$h = \frac{\log(y+h) - \log y}{\log(y+1) - \log y} = \frac{a}{b},$$

en négligeant la quantité $h\omega < \frac{1}{y}$. Si $y > 10000$, on a donc $h$ à $\frac{1}{10000}$ près. Mais il y a une autre erreur à craindre, parce qu'on n'a $a$ et $b$ qu'à une unité près. Alors on n'a $h$ qu'à $\frac{1}{100}$ près.

### DES LOGARITHMES CONSIDÉRÉS COMME LIMITES D'EXPRESSIONS ALGÉBRIQUES.

**128.** Nous avons vu que $e = \lim\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu}$ quand $\mu$ devient infiniment grand. On peut démontrer que

$$e^x = \lim\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$$

quand $m$ devient plus grand que toute quantité donnée. En effet, si l'on pose

$$\mu = \frac{m}{x}, \quad \text{on a} \quad \left(1+\frac{x}{m}\right)^{\frac{m}{x}} = e + \alpha,$$

$\alpha$ étant une quantité qui s'évanouit quand $m$ surpasse toute limite. Donc

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = (e+\alpha)^x.$$

Cette égalité a lieu quel que soit $m$; par suite, elle a encore lieu à la limite, quand $\alpha = 0$. Donc

$$e^x = \lim\left(1+\frac{x}{m}\right)^m.$$

On pourrait d'ailleurs le démontrer directement, comme on a démontré que $e = \lim\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$.

**129.** Si l'on pose

$$e^x = y, \quad \text{d'où} \quad x = \mathrm{l}y,$$

il s'ensuit que $\quad y = \lim \left(1 + \frac{ly}{m}\right)^m;$

par conséquent,

$$\lim \sqrt[m]{y} = \lim \left(1 + \frac{ly}{m}\right) \quad \text{ou} \quad ly = \lim \left[m\left(\sqrt[m]{y} - 1\right)\right].$$

C'est ce qu'on peut d'ailleurs démontrer directement. En effet, puisque $l(1+x) = \frac{x}{1+\theta x}$, si l'on pose

$$1 + x = \sqrt[m]{y}, \quad \text{d'où} \quad x = \sqrt[m]{y} - 1,$$

on a $\quad l\left(\sqrt[m]{y}\right) = \frac{ly}{m} = \frac{\sqrt[m]{y} - 1}{1 + \theta\left(\sqrt[m]{y} - 1\right)};$

donc $\quad ly = \frac{m\left(\sqrt[m]{y} - 1\right)}{1 + \theta\left(\sqrt[m]{y} - 1\right)}.$

Or si $m$ est très-grand, $\sqrt[m]{y} - 1$ est une fraction extrêmement petite, qui à la limite devient 0; d'où l'on déduit encore

$$ly = \lim\left[m\left(\sqrt[m]{y} - 1\right)\right] \text{ quand } m = \infty.$$

Cette formule peut servir à calculer le logarithme népérien d'un nombre. Pour la commodité du calcul, on peut faire $m$ égal à une puissance de 2, et alors $\sqrt[m]{y}$ s'obtient par des extractions successives de racines carrées.

**130.** On peut se servir aussi de cette formule pour développer $l(1+u)$ en série. En effet, si l'on pose

$$y = 1 + u,$$

on aura $\quad m\sqrt[m]{y} - 1 = m(1+u)^{\frac{1}{m}} - 1,$

et si $u$ est moindre que l'unité en valeur absolue, le second membre pourra être développé par la formule du binôme; on aura ainsi

$$m(1+u)^{\frac{1}{m}} - 1 = u + \frac{\frac{1}{m} - 1}{1 \cdot 2} u^2 + \frac{\left(\frac{1}{m} - 1\right)\left(\frac{1}{m} - 2\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} u^3 + \ldots;$$

ce qui donne, en supposant $m = \infty$,

$$l(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \ldots.$$

AUTRE DÉMONSTRATION DE LA SÉRIE DE TAYLOR.

**131.** Soient $m$ et M la plus petite et la plus grande valeur de $f^{n+1}(x)$, lorsque $x$ croît depuis $x_0$ jusqu'à X. Si $a+h$ est une quantité comprise entre $x_0$ et X, on aura

$$f^{n+1}(a+h) - m > 0.$$

Mais le premier membre de cette inégalité est la dérivée par rapport à $h$ de la fonction

$$f^n(a+h) - f^n(a) + hm,$$

donc cette fonction croît avec $h$, et comme elle est nulle pour $h = 0$, on aura pour $h > 0$

$$f^n(a+h) - f^n(a) - hm > 0.$$

Maintenant le premier membre de cette nouvelle inégalité est la dérivée par rapport à $h$ de la fonction

$$f^{n-1}(a+h) - f^{n-1}(a) - hf^n(a) - \frac{h^2 m}{1.2}:$$

donc cette dernière fonction est croissante avec $h$, et comme elle s'annule en même temps que $h$, on aura pour $h > 0$

$$f^{n-1}(a+h) - f^{n-1}(a) - hf^n(a) - \frac{h^2 m}{1.2} > 0.$$

On aura de même

$$f^{n-2}(a+h) - f^{n-2}(a) - hf^{n-1}(a) - \frac{h^2}{1.2}f^n(a) - \frac{h^3 m}{1.2.3} > 0,$$

$$f^{n-3}(a+h) - f^{n-3}(a) - hf^{n-2}(a) - \ldots - \frac{h^4 m}{1.2.3.4} > 0,$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

et enfin

$$(1)\left\{\begin{array}{l} f(a+h) - f(a) - hf'(a) \\ - \dfrac{h^2}{1.2}f''(a) - \ldots - \dfrac{h^n}{1.2\ldots n}f^n(a) - \dfrac{h^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}m > 0. \end{array}\right.$$

On trouvera de même

$$(2)\left\{\begin{array}{l} f(a+h)-f(a)-hf'(a) \\ -\dfrac{h^2}{1.2}f''(a)-\ldots-\dfrac{h^n}{1.2\ldots n}f^n(a)-\dfrac{h^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}M<0. \end{array}\right.$$

On conclut de ces deux inégalités

$$\left\{\begin{array}{l} f(a+h)=f(a)+hf'(a) \\ +\dfrac{h^2}{1.2}f''(a)+\ldots+\dfrac{h^n}{1.2\ldots n}f^n(a)+R, \end{array}\right.$$

R est une quantité comprise entre $\dfrac{h^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}m$ et $\dfrac{h^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}M$ : par conséquent on peut (n° 109) la représenter par $\dfrac{h^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}f^{n+1}(a+\theta h)$, si $f^{n+1}(x)$ reste finie et continue pour toutes les valeurs de $x$ comprises entre $x_0$ et X. On aura donc

$$\left\{\begin{array}{l} f(a+h)=f(a)+hf'(a) \\ +\dfrac{h^2}{1.2}f''(a)+\ldots+\dfrac{h^n}{1.2\ldots n}f^n(a)+\dfrac{h^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}f^{n+1}(a+\theta h), \end{array}\right.$$

ce qui est bien la formule de Taylor, accompagnée de son terme complémentaire.

On a supposé jusqu'ici l'accroissement $h$ positif. Lorsque cet accroissement est négatif, il n'y a de changé dans la démonstration précédente que le sens des inégalités (1) et (2).

---

# DIXIÈME LEÇON.

**Généralités sur les expressions imaginaires. — Formule de Moivre. — Développement du sinus et du cosinus d'un arc suivant les puissances du sinus et du cosinus de cet arc. — Développement d'une puissance d'un sinus ou d'un cosinus suivant les sinus et les cosinus des multiples de l'arc. — Résolution de l'équation binôme. — Théorème de Cotes.**

---

## GÉNÉRALITÉS SUR LES EXPRESSIONS IMAGINAIRES.

**132.** La résolution des équations du second degré qui n'ont pas de racines réelles conduit à des expressions que l'on nomme *imaginaires,* et qui sont de la forme

$$a + b\sqrt{-1}.$$

On a trouvé de grands avantages à introduire ces expressions dans le calcul : on les combine par voie d'addition, de soustraction, etc., en opérant comme si $\sqrt{-1}$ était un facteur réel dont le carré fût $-1$. On obtient pour résultat de nouvelles expressions imaginaires, et il est utile de reconnaître les relations qui existent entre les quantités réelles comprises dans les expressions données et dans celles qui résultent de leur combinaison.

Une équation où entrent des quantités imaginaires est la représentation symbolique de deux équations entre des quantités réelles. Ainsi, l'équation

$$a + b\sqrt{-1} = a' + b'\sqrt{-1}$$

comprend les deux suivantes :

$$a = a', \quad b = b'.$$

**133.** Toute expression imaginaire $a + b\sqrt{-1}$ peut être mise sous la forme $r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t)$. Il faut et il suffit, pour cela, que l'on ait

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \cos t = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{et} \quad \sin t = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}};$$

on a aussi

$$\tang t = \frac{b}{a}.$$

La quantité $r$ que l'on prend toujours positive est dite le *module* de l'expression imaginaire. Les valeurs de $\sin t$ et de $\cos t$ font connaître l'arc $t$ ou l'*argument :* on le choisit ordinairement positif et plus petit que la circonférence.

### FORMULE DE MOIVRE.

**134.** Supposons maintenant que l'on fasse le produit $(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)$ multiplié par $(\cos y + \sqrt{-1}\sin y)$; on aura, pour la partie réelle,

$$\cos x \cos y - \sin x \sin y \quad \text{ou} \quad \cos(x+y),$$

et pour le coefficient de $\sqrt{-1}$,

$$\sin x \cos y + \sin y \cos x \quad \text{ou} \quad \sin(x+y).$$

Par conséquent,

$$\left\{\begin{aligned} &(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)(\cos y + \sqrt{-1}\sin y) \\ &= \cos(x+y) + \sqrt{-1}\sin(x+y). \end{aligned}\right.$$

De là on conclut facilement, quel que soit le nombre de facteurs,

$$\left\{\begin{aligned} &(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)(\cos y + \sqrt{-1}\sin y)(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)\ldots \\ &\quad = \cos(x+y+z+\ldots) + \sqrt{-1}\sin(x+y+z+\ldots). \end{aligned}\right.$$

En supposant $x = y = z = \ldots$, on en déduit, $m$ désignant un nombre entier et positif,

$$(1) \qquad (\cos x + \sqrt{-1}\sin x)^m = \cos mx + \sqrt{-1}\sin mx.$$

Cette formule, appelée formule de Moivre, est encore vraie lorsque $m$ est un nombre fractionnaire, positif ou négatif.

### DÉVELOPPEMENT DU SINUS ET DU COSINUS D'UN MULTIPLE D'UN ARC SUIVANT LES PUISSANCES DU SINUS ET DU COSINUS DE CET ARC.

**135.** Si l'on développe le premier membre de la for-

mule (1), et que l'on égale, de part et d'autre, les parties réelles et les parties imaginaires, il vient

$$\left\{\begin{aligned}\cos mx &= \cos^m x - \frac{m(m-1)}{1.2}\cos^{m-2}x\sin^2 x\\ &\quad + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\cos^{m-4}x\sin^4 x - \ldots\end{aligned}\right.$$

et

$$\left\{\begin{aligned}\sin mx &= m\cos^{m-1}x\sin x\\ &\quad - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\cos^{m-3}x\sin^3 x + \ldots.\end{aligned}\right.$$

On voit que $\cos mx$ et $\sin mx$ s'expriment en fonction rationnelle de $\sin x$ et de $\cos x$. Dans tous les cas, $\cos mx$ peut s'exprimer en fonction rationnelle de $\cos x$ seul, mais $\sin mx$ ne peut s'exprimer en fonction rationnelle de $\sin x$ seul, que si $m$ est un nombre impair.

### DÉVELOPPEMENT D'UNE PUISSANCE D'UN SINUS OU D'UN COSINUS SUIVANT LES SINUS ET LES COSINUS DES MULTIPLES DE L'ARC.

136. On peut aussi résoudre la question inverse et développer $\cos^m x$ et $\sin^m x$ suivant les cosinus et les sinus des divers multiples de $x$. Soient

$$u = \cos x + \sqrt{-1}\sin x \quad \text{et} \quad v = \cos x - \sqrt{-1}\sin x,$$

on aura $\quad 2\cos x = u + v \quad$ et $\quad 2\sqrt{-1}\sin x = u - v$;

de là résulte

$$\left\{\begin{aligned}2^m\cos^m x = (u+v)^m &= u^m + mu^{m-1}v + \frac{m(m-1)}{1.2}u^{m-2}v^2 + \ldots\\ &\quad + \frac{m(m-1)}{1.2}u^2v^{m-2} + muv^{m-1} + v^m.\end{aligned}\right.$$

Il convient de distinguer deux cas.

1°. Si $m$ est pair et égal à $2n$, le développement renferme un nombre impair de termes et il y a un terme du milieu qui est $\frac{m(m-1)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots n}u^n v^n$. On a donc, en

groupant les termes également distants des extrêmes,

$$\left\{\begin{aligned} 2^m \cos^m x &= u^m + v^m + muv(u^{m-2} + v^{m-2}) + \ldots \\ &+ \frac{m(m-1)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots n} u^n v^n. \end{aligned}\right.$$

Or $u^p + v^p = 2\cos px$ et $u^p v^p = 1$, puisque $uv = 1$; donc

$$\left\{\begin{aligned} 2^m \cos^m x &= 2\cos mx + 2m\cos(m-2)x + \ldots \\ &+ \frac{m(m-1)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots n}; \end{aligned}\right.$$

d'où

$$(1)\left\{\begin{aligned} &2^{m-1}\cos^m x = \cos mx + m\cos(m-2)x \\ &+ \frac{m(m-1)}{1.2}\cos(m-4)x + \ldots + \frac{1}{2}\frac{m(m-1)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots n}. \end{aligned}\right.$$

2°. Si $m$ est impair et égal à $2n+1$, $(u+v)^m$ aura un nombre pair de termes, et l'on obtiendra facilement

$$(2)\left\{\begin{aligned} &2^{m-1}\cos^m x = \cos mx + m\cos(m-2)x \\ &+ \frac{m(m-1)}{1.2}\cos(m-4)x + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(n+2)}{1.2.3\ldots n}\cos x. \end{aligned}\right.$$

**137.** Pour avoir $\sin^m x$, il faudra prendre la formule

$$u - v = 2\sqrt{-1}\sin x,$$

et en élever les deux membres à la puissance $m$; il viendra alors

$$\left\{\begin{aligned} (\sqrt{-1})^m 2^m . \sin^m x &= u^m - mu^{m-1}v + \frac{m(m-1)}{1.2}u^{m-2}v^2 \ldots \\ &\pm \frac{m(m-1)}{1.2}u^2 . v^{m-2} \mp muv^{m-1} \pm v^m. \end{aligned}\right.$$

1°. Supposons d'abord $m$ pair et égal à $2n$. Alors

$$(\sqrt{-1})^m = (-1)^n,$$

et il y aura un terme du milieu qui sera

$$\pm \frac{m(m-1)\ldots(n+1)}{1.2\ldots n} u^n v^n.$$

On aura donc, en groupant les termes deux à deux,

$$\left\{\begin{aligned}(-1)^n.\,2^m \sin^m x &= (u^m + v^m) - muv\,(u^{m-2} + v^{m-2})\\ &+ \frac{m(m-1)}{1.2} u^2 v^2 (u^{m-4} + v^{m-4}) \ldots\\ &\pm \frac{m(m-1)\ldots(n+1)}{1.2\ldots n} u^n v^n,\end{aligned}\right.$$

ou, en remplaçant $u^k + v^k$ par $2 \cos kx$, $u^k v^k$ par 1, et divisant les deux membres par 2,

$$(3)\left\{\begin{aligned}&(-1)^n 2^{m-1} \sin mx = \cos mx - m \cos(m-2)x\\ &+ \frac{m(m-1)}{1.2} \cos(m-4)x \ldots \pm \frac{1}{2} \frac{m(m-1)(n+1)}{1.2.3\ldots n};\end{aligned}\right.$$

2°. Supposons maintenant $m$ impair et égal à $2n+1$. Alors

$$(\sqrt{-1})^m = (-1)^n \sqrt{-1},$$

et l'on aura, en groupant les termes deux à deux,

$$\begin{aligned}(-1)^n \sqrt{-1}\, 2^m \sin^m x &= (u^m - v^m) - muv\,(u^{m-2} - v^{m-2})\\ &+ \frac{m(m-1)}{1.2} u^2 v^2 (u^{m-4} - v^{m-4}) \ldots\\ &\pm \frac{m(m-1)\ldots(n+2)}{1.2\ldots n} u^n v^n (u - v).\end{aligned}$$

En général,

$$u^k - v^k = 2\sqrt{-1} \sin kx, \quad u^k v^k = 1.$$

Donc, en divisant les deux membres par $2\sqrt{-1}$, il viendra

$$(4)\left\{\begin{aligned}&(-1)^n 2^{m-1} \sin^m x = \sin mx - m \sin(m-2)x\\ &+ \frac{m(m-1)}{1.2} \sin(m-4)x \ldots \pm \frac{m(m-1)\ldots(n+2)}{1.2\ldots n} \sin x.\end{aligned}\right.$$

RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION BINÔME.

138. La formule de Moivre peut servir à la résolution de l'équation binôme $x^m = \pm a$. Nous traiterons d'abord l'équation $x^m = a$, $a$ étant une quantité réelle et positive.

A cet effet, posons

$$x = r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t),$$

d'où
$$x^m = r^m(\cos mt + \sqrt{-1}\sin mt),$$

on aura pour déterminer $r$ et $t$ l'équation

$$r^m(\cos mt + \sqrt{-1}\sin mt) = a,$$

qui revient aux suivantes:

$$r^m\cos mt = a, \quad r^m\sin mt = 0.$$

En élevant ces deux équations au carré et ajoutant, on a d'abord

$$r^{2m} = a^2,$$

d'où

$$r = +\sqrt[m]{a},$$

$+\sqrt[m]{a}$ désignant la valeur arithmétique de la racine $m^{ième}$ de $a$. Il suit de là que

$$\sin mt = 0 \quad \text{et} \quad \cos mt = +1;$$

donc
$$mt = 2i\pi, \quad \text{d'où} \quad t = \frac{2i\pi}{m},$$

$i$ étant un nombre entier quelconque, positif ou négatif. Ainsi les diverses valeurs de $x$ sont données par la formule

$$x = r\left(\cos\frac{2i\pi}{m} + \sqrt{-1}\sin\frac{2i\pi}{m}\right).$$

139. Pour avoir toutes les valeurs de $x$, il suffit de donner à $i$ les valeurs $0, 1, 2, 3, \ldots, m-1$. En effet, on peut toujours poser

$$i = mq + k,$$

$k$ étant un nombre entier, positif et moindre que $m$. Il en résulte

$$\frac{2i\pi}{m} = 2q\pi + \frac{2k\pi}{m}, \quad \sin\frac{2i\pi}{m} = \sin\frac{2k\pi}{m}, \quad \cos\frac{2i\pi}{m} = \cos\frac{2k\pi}{m};$$

et, par conséquent,

$$\cos\frac{2i\pi}{m} + \sqrt{-1}\sin\frac{2i\pi}{m} = \cos\frac{2k\pi}{m} + \sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{m}.$$

Donc la formule

$$x = r\left(\cos\frac{2k\pi}{m} + \sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{m}\right)$$

donne toutes les valeurs de $x$, lorsqu'on attribue seulement à $k$ les valeurs $0, 1, 2, 3, \ldots, m-1$.

De plus les $m$ valeurs ainsi obtenues seront toutes différentes. En effet, comme $k$ est plus petit que $m$ et positif, on a $\frac{2k\pi}{m} < 2\pi$; par conséquent, deux quelconques des arcs considérés n'ont pas, à la fois, même sinus et même cosinus.

**140.** Il n'est même pas nécessaire de donner à $k$ toutes les valeurs entières de $0$ à $m-1$. En effet, supposons que l'on fasse

$$k = m - k',$$

il viendra

$$\frac{2k\pi}{m} = \pi - \frac{2k'\pi}{m},\ \cos\frac{2k\pi}{m} = \cos\frac{2k'\pi}{m},\ \sin\frac{2k\pi}{m} = -\sin\frac{2k'\pi}{m},$$

et, par conséquent,

$$\cos\frac{2k\pi}{m} + \sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{m} = \cos\frac{2k'\pi}{m} - \sqrt{-1}\sin\frac{2k'\pi}{m}.$$

Il suit de là que si l'on prend

$$x = r\left(\cos\frac{2k\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{m}\right),$$

on aura toutes les valeurs de $x$ en donnant à $k$ les valeurs $0, 1, 2, 3, \ldots,$ jusqu'à $\frac{m}{2}$ ou $\frac{m-1}{2}$, suivant que $m$ sera pair ou impair.

THÉORÈME DE COTES.

**141.** La formule précédente, en faisant connaître toutes les racines de l'équation binôme, permet de décomposer le premier membre de cette équation en facteurs réels du premier ou du second degré.

Nous distinguerons deux cas :

1°. Si $m$ est pair, on donnera à $k$ les valeurs $0, 1, 2,$

$3, \ldots,$ jusqu'à $\frac{m}{2}$. L'équation $x^m - r^m = 0$ aura pour racines

$$x = r,$$

$$x = r\left(\cos\frac{2\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\,\sin\frac{2\pi}{m}\right),$$

$$x = r\left(\cos\frac{4\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\,\sin\frac{4\pi}{m}\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x = -r.$$

Il résulte de là, en groupant les facteurs qui correspondent aux racines conjuguées,

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} x^m - r^m = (x^2 - r^2)\left(x^2 - 2r\cos\frac{2\pi}{m}x + r^2\right) \\ \times\left(x^2 - 2r\cos\frac{4\pi}{m}x + r^2\right)\cdots\left(x^2 - 2r\cos\frac{(m-2)\pi}{m}x + r^2\right). \end{array}\right.$$

2°. Si $m$ est impair, on doit faire $k$ égal à $0, 1, 2, 3, \ldots, \frac{m-1}{2}$, et l'équation $x^m - r^m = 0$ aura pour racines

$$x = r,$$

$$x = r\left(\cos\frac{2\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\,\sin\frac{2\pi}{m}\right),$$

$$x = r\left(\cos\frac{4\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\,\sin\frac{4\pi}{m}\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x = r\left(\cos\frac{(m-1)\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\,\frac{(m-1)\pi}{m}\right).$$

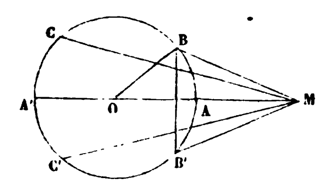
Dans ce cas, on a

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} x^m - r^m = (x - r)\left(x^2 - 2r\cos\frac{2\pi}{m}x + r^2\right) \\ \times\left(x^2 - 2r\cos\frac{4\pi}{m}x + r^2\right)\cdots\left(x^2 - 2r\cos\frac{(m-1)\pi}{m}x + r^2\right). \end{array}\right.$$

L'interprétation géométrique de cette formule et de la précédente conduit au théorème de Cotes.

Décrivons un cercle avec un rayon égal à $r$; menons un diamètre AA′, et, à partir du point A, divisons la circonférence en $m$ parties égales. Prenons sur ce diamètre une longueur $OM = x$, et joignons le point M aux divers points de division. MB étant l'une de ces lignes, on aura

*Fig.* 5.




$$\overline{MB}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{OM}^2 - 2\,OB.OM \cos BOA,$$

ou
$$MB.MB' = x^2 + r^2 - 2rx \cos \frac{2\pi}{m}.$$

De même,
$$MC.MC' = x^2 + r^2 - 2rx \cos \frac{4\pi}{m} \ldots.$$

On retrouve ainsi les divers facteurs du second degré qui composent $x^m - r^m$.

Si $m$ est pair, il y aura deux facteurs réels du premier degré $x - r$ et $x + r$ représentés par MA et MA′, et dont le produit donne le facteur du second degré $x^2 - r^2$. Si $m$ est impair, il n'y aura qu'un facteur du premier degré $x - r$ ou MA.

D'après cela, les formules (1) et (2) expriment ce théorème dû à Cotes, que *la différence des* m^ièmes^ *puissances des lignes* OM *et* OA *est égale au produit des lignes menées du point* M *aux divers points de division de la circonférence.*

---

# ONZIÈME LEÇON.

**Suite de la résolution des équations binômes. — Théorie des exponentielles et des logarithmes imaginaires.**

## SUITE DE LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS BINOMES.

**142.** Soit maintenant à résoudre l'équation

$$x^m = -a.$$

Posons encore

$$x = r(\cos t + \sqrt{-1} \sin t),$$

d'où

$$x^m = r^m(\cos mt + \sqrt{-1} \sin mt);$$

on aura, pour déterminer $r$ et $t$, les deux équations

$$r^m \cos mt = -a \quad \text{et} \quad r^m \sin mt = 0.$$

On tire de là

$$r = +\sqrt[m]{a}, \quad \sin mt = 0, \quad \cos mt = -1.$$

Donc

$$mt = (2i+1)\pi, \quad \text{d'où} \quad t = \frac{(2i+1)\pi}{m},$$

$i$ étant un nombre entier quelconque, positif ou négatif; par conséquent $x$ est donnée par la formule

$$x = r\left[\cos \frac{(2i+1)\pi}{m} + \sqrt{-1} \sin \frac{(2i+1)\pi}{m}\right].$$

Comme dans le cas précédent (n° 139), il suffit de faire successivement $i = 0, 1, 2, \ldots (m-1)$, pour avoir toutes les valeurs de $x$. De plus, ces valeurs sont différentes; en effet, si $k$ désigne l'un des nombres $0, 1, 2, 3, \ldots, (m-1)$, comme $k$ est au plus égal à $m-1$ et $2k+1$ au plus égal à $2m-1$, $\frac{(2k+1)\pi}{m}$ est toujours plus petit que $2\pi$; par conséquent, les $m$ arcs considérés n'ont pas à la fois le même sinus et le même cosinus.

**143.** Il n'est pas nécessaire de donner à $k$ toutes les

valeurs entières de o à $m-1$. En effet, si l'on fait

$$k = m - 1 - k',$$

il vient

$$\cos\frac{[2m-(2k'+1)]\pi}{m} + \sqrt{-1}\sin\frac{[2m-(2k'+1)]\pi}{m}$$
$$= \cos\frac{(2k'+1)\pi}{m} - \sqrt{-1}\sin\frac{(2k'+1)\pi}{m},$$

par conséquent la formule

$$x = r\left[\cos\frac{(2k+1)\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{(2k+1)\pi}{m}\right]$$

donnera les $m$ valeurs de $x$, en attribuant à $k$ toutes les valeurs entières jusqu'au plus grand nombre entier qui ne surpasse pas $\frac{m-1}{2}$; c'est-à-dire qu'on s'arrêtera à $\frac{m-2}{2}$ si $m$ est pair et à $\frac{m-1}{2}$ si $m$ est impair.

**144.** De même que dans le cas précédent, on pourra décomposer $x^m + r^m$ en facteurs réels du second degré, et trouver une interprétation géométrique du résultat. On aura un théorème analogue à celui du n° **141** avec cette différence que les divisions de la circonférence en $m$ parties égales ne commenceront pas de suite au point A, mais au point qui en sera distant de l'arc $\frac{\pi}{m}$.

**145.** En dernier lieu, supposons que l'on veuille résoudre l'équation

$$x^m = a + b\sqrt{-1}.$$

Remplaçons $a + b\sqrt{-1}$ par $\rho(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)$; posons enfin

$$x = r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t);$$

on aura à résoudre les deux équations

$$r^m \cos mt = \rho\cos\varphi, \quad r^m \sin mt = \rho\sin\varphi.$$

On tire de là

$$(r^m)^2 = \rho^2, \quad \text{d'où} \quad r^m = +\rho \quad \text{et} \quad r = +\sqrt[m]{\rho},$$

$+\sqrt[m]{\rho}$ étant la valeur arithmétique de la racine $m^{ième}$ de $\rho$. Il vient alors

$$\cos mt = \cos\varphi, \quad \sin mt = \sin\varphi;$$

par conséquent,

$$mt = 2i\pi + \varphi, \quad \text{d'où} \quad t = \frac{2i\pi + \varphi}{m},$$

$i$ désignant un nombre entier quelconque, positif ou négatif; par suite,

$$x = r\left(\cos\frac{2i\pi + \varphi}{m} + \sqrt{-1}\sin\frac{2i\pi + \varphi}{m}\right).$$

On prouvera, comme précédemment, qu'il suffit de donner à $i$, dans cette formule, les valeurs $0, 1, 2, \ldots$, jusqu'à $m - 1$, et qu'on obtiendra ainsi pour $x$, $m$ valeurs différentes.

**146**. La résolution de l'équation

$$x^{2m} + px^m + q = 0$$

est maintenant facile à opérer; car on tire de cette équation les suivantes :

$$x^m = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

$$x^m = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

qui rentrent dans l'un des cas déjà traités.

## THÉORIE DES EXPONENTIELLES IMAGINAIRES.

**147**. On sait que pour toute valeur réelle de $x$, on a

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots.$$

*Convenons* d'appeler $e^{x\sqrt{-1}}$ le résultat de la substitution de $x\sqrt{-1}$ à la place de $x$ dans la série ci-dessus, on aura

$$e^{x\sqrt{-1}} = 1 + x\sqrt{-1} - \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots,$$

ou

$$\left\{\begin{aligned} e^{x\sqrt{-1}} &= 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots \\ &\quad + \sqrt{-1}\left(x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5}\ldots\right), \end{aligned}\right.$$

ce qui revient à

$$(1) \qquad e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\sin x.$$

En changeant $x$ en $-x$, on a

$$(2) \qquad e^{-x\sqrt{-1}} = \cos x - \sqrt{-1}\sin x.$$

On tire de là

$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$$

et

$$\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

**148.** Lorsque $x$ et $y$ sont des quantités réelles, on a

$$e^x \times e^y = e^{x+y}.$$

La même relation a lieu quand on a $x\sqrt{-1}$ et $y\sqrt{-1}$ au lieu de $x$ et de $y$. Effectivement on a, en multipliant membre à membre l'équation (1) et celle qu'on obtient par le changement de $x$ en $y$,

$$e^{x\sqrt{-1}} \times e^{y\sqrt{-1}} = \cos(x+y) + \sqrt{-1}\sin(x+y),$$

c'est-à-dire

$$e^{x\sqrt{-1}} \times e^{y\sqrt{-1}} = e^{(x+y)\sqrt{-1}}.$$

On peut encore démontrer cette relation de la manière suivante. Quand $x$ et $y$ sont réels, on a

$$e^x \times e^y = e^{x+y},$$

il s'ensuit que, dans ce cas,

$$(a) \qquad \left\{\begin{aligned} &\left(1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \ldots\right)\left(1 + y + \frac{y^2}{1.2} + \ldots\right) \\ &= 1 + (x+y) + \frac{(x+y)^2}{1.2} + \ldots. \end{aligned}\right.$$

Or cette relation est une identité, car elle doit avoir lieu pour toutes les valeurs réelles de $x$ et de $y$, sans aucune dépendance entre ces valeurs. Par conséquent, cette identité subsiste encore, lorsqu'on y change $x$ et $y$ en $x\sqrt{-1}$ et $y\sqrt{-1}$; donc

$$e^{x\sqrt{-1}} \times e^{y\sqrt{-1}} = e^{(x+y)\sqrt{-1}}.$$

**149.** Par extension, on est convenu de représenter par $e^{x+y\sqrt{-1}}$ le résultat de la substitution de $x+y\sqrt{-1}$ à la place de $x$, dans la série

$$1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots.$$

La formule $e^x \times y^y = e^{x+y}$ est encore vraie lorsque les exposants sont de la forme $x + y\sqrt{-1}$.

En effet, on aura d'abord, en changeant $y$ ou $y\sqrt{-1}$ dans l'équation identique ($a$),

$$e^x e^{y\sqrt{-1}} = e^{x+y\sqrt{-1}},$$

on a, par conséquent,

$$e^{x+y\sqrt{-1}} = e^x(\cos y + \sqrt{-1}\sin y),$$

$$e^{u+v\sqrt{-1}} = e^u(\cos v + \sqrt{-1}\sin v);$$

donc

$$e^{x+y\sqrt{-1}} \times e^{u+v\sqrt{-1}} = e^{x+u}\left[\cos(y+v) + \sqrt{-1}\sin(y+v)\right],$$

c'est-à-dire

$$e^{x+y\sqrt{-1}} \times e^{u+v\sqrt{-1}} = e^{x+u+(y+v)\sqrt{-1}}.$$

**150.** *Toute expression imaginaire* $a + b\sqrt{-1}$ *peut être mise sous la forme* $e^{x+y\sqrt{-1}}$. En effet, comme

$$e^{x+y\sqrt{-1}} = e^x(\cos y + \sqrt{-1}\sin y),$$

il suffit, pour opérer cette transformation, de poser

$$e^x \cos y = a, \quad e^x \sin y = b; \quad \text{d'où} \quad (e^x)^2 = a^2 + b^2,$$

et comme $e^x$ est toujours positif,

$$e^x = +\sqrt{a^2+b^2}; \quad \text{d'où} \quad x = \frac{1}{2}\,\mathrm{l}(a^2+b^2).$$

On aura ensuite

$$\cos y = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{et} \quad \sin y = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Alors, si $\varphi$ est le plus petit des arcs positifs qui ont $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ pour cosinus, et $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ pour sinus, on aura

$$y = 2i\pi + \varphi,$$

$i$ étant un nombre entier quelconque, positif ou négatif. D'après cela, on a

$$a + b\sqrt{-1} = e^{\frac{1}{2}\,l(a^2+b^2)+(2i\pi+\varphi)\sqrt{-1}}.$$

On peut aussi obtenir ce résultat de la manière suivante. Posons

$$\rho(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi) = a + b\sqrt{-1},$$

on aura

$$\rho = \sqrt{a^2+b^2}, \quad \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{et} \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Il suffit donc que l'on ait

$$e^x(\cos y + \sqrt{-1}\sin y) = \rho(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi),$$

c'est-à-dire $\quad e^x\cos y = \rho\cos\varphi, \quad e^x\sin y = \rho\sin\varphi$:

de là on tire $\quad (e^x)^2 = \rho^2, \quad$ d'où $\quad e^x = \rho = +\sqrt{a^2+b^2}$,

par suite $\quad \cos y = \cos\varphi \quad$ et $\quad \sin y = \sin\varphi$;

donc

$$y = 2i\pi + \varphi,$$

$i$ étant un nombre entier quelconque, positif ou négatif, ce qui donne, comme plus haut,

$$a + b\sqrt{-1} = e^{\frac{1}{2}\,l(a^2+b^2)+(2i\pi+\varphi)\sqrt{-1}}.$$

LOGARITHMES IMAGINAIRES.

**151.** Si l'on convient d'appeler logarithme népérien de $a + b\sqrt{-1}$ l'exposant imaginaire de $e$, dans l'égalité précédente, on aura

$$l(a + b\sqrt{-1}) = \frac{1}{2}\,l(a^2+b^2) + (2i\pi + \varphi)\sqrt{-1}.$$

Sous ce nouveau point de vue, une quantité quelconque a un nombre infini de logarithmes, parce que $i$ peut avoir toutes les valeurs entières possibles, positives ou négatives.

Si $b = 0$, on a, en désignant par $\mathrm{l}(a)$ ces nouveaux logarithmes,

$$\mathrm{l}(a) = \mathrm{l}\,a + (2i\pi + \varphi)\sqrt{-1}.$$

Si $a$ est un nombre positif A, on a $\varphi = 0$ et

$$\mathrm{l}(\mathrm{A}) = \mathrm{l}\,\mathrm{A} + 2i\pi\sqrt{-1},$$

ce qui montre qu'un nombre positif a un seul logarithme réel et une infinité d'imaginaires.

Si $a$ est un nombre négatif $-\mathrm{A}$, on a $\varphi = \pi$ et

$$\mathrm{l}(-\mathrm{A}) = \mathrm{l}\,\mathrm{A} + (2i + 1)\pi\sqrt{-1}.$$

Ceci fait voir qu'une quantité négative n'a pas de logarithme réel, puisque, même en faisant $i = 0$, on a toujours

$$\mathrm{l}(-\mathrm{A}) = \mathrm{l}\,\mathrm{A} + \pi\sqrt{-1}.$$

Dans le cas où $\mathrm{A} = 1$, on a

$$\mathrm{l}(1) = 2i\pi\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad \mathrm{l}(-1) = (2i + 1)\pi\sqrt{-1}.$$

---

# DOUZIÈME LEÇON.

**Vraie valeur des expressions qui se présentent sous l'une des formes**

$\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \times \infty$, $0^0$, $1^\infty$.

---

## VRAIE VALEUR DES EXPRESSIONS QUI SE PRÉSENTENT SOUS LA FORME $\frac{0}{0}$.

**152.** Soit $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ une fraction qui se réduit à $\frac{0}{0}$ quand $x = a$. Cherchons vers quelle limite tend $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$, lorsque $x$ tend indéfiniment vers $a$. Pour cela, remarquons que, puisque $\varphi(a) = 0$ et $f(a) = 0$, on a identiquement

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{f(x) - f(a)}, \quad \text{ou bien} \quad \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{\dfrac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a}}{\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}};$$

or, $x$ tendant vers la valeur $a$, $\frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a}$, $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ tendent respectivement, et par définition même, vers $\varphi'(a)$ et $f'(a)$. Donc

$$\lim \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{\varphi'(a)}{f'(a)}, \quad \text{ou} \quad \lim \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \lim \frac{\varphi'(x)}{f'(x)}.$$

On peut arriver à ce résultat d'une autre manière, en s'aidant de la série de Taylor. Supposons, en général, que $f^{n+1}(a)$ et $\varphi^{n+1}(a)$ soient les premières dérivées qui ne s'annulent pas simultanément pour $x = a$; on aura, en posant $x = a + h$ dans la formule (11) du n° 124,

$$\varphi(a + h) = \frac{h^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)} \varphi^{(n+1)}(a + \theta h),$$

$$f(a + h) = \frac{h^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)} f^{(n+1)}(a + \theta' h),$$

d'où

$$\frac{\varphi(a+h)}{f(a+h)} = \frac{\varphi^{(n+1)}(a+\theta h)}{f^{(n+1)}(a+\theta' h)},$$

d'où l'on tire, en faisant $h = 0$,

$$\lim \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{\varphi^{(n+1)}(a)}{f^{(n+1)}(a)}.$$

153. Exemples. 1°. L'expression $\frac{x^m - a^m}{x-a}$ devient $\frac{0}{0}$ pour $x = a$. Or la dérivée de $x^m - a^m$ est $mx^{m-1}$, et celle de $x - a$ est 1; donc la vraie valeur de $\frac{x^m - a^m}{x-a}$ est $ma^{m-1}$ pour $x = a$, quel que soit $m$.

2°. En appliquant la même règle, on trouve que, pour $x = a$, la vraie valeur de $\frac{x^3 - 4ax^2 + 5a^2x - 2a^3}{x^2 - a^2}$ est 0, et c'est ce que l'on peut voir autrement, car

$$x^3 - 4ax^2 + 5a^2x - 2a^3 = (x-a)^2(x-2a),$$
$$x^2 - a^2 = (x-a)(x+a);$$

donc la fonction donnée est égale à

$$\frac{(x-a)^2(x-2a)}{(x-a)(x+a)} \quad \text{ou} \quad \frac{(x-a)(x-2a)}{x+a},$$

expression qui devient bien 0 pour $x = a$.

3°. Soit $\frac{\sin x}{x}$. Pour $x = 0$, cette fonction devient $\frac{0}{0}$; la dérivée de $\sin x$ est $\cos x$, et celle de $x$ est 1; donc la limite de $\frac{\sin x}{x}$ est 1 pour $x = 0$.

Ce résultat doit être considéré comme une vérification, mais non comme une démonstration, puisque nous n'avons obtenu la dérivée de $\sin x$ qu'en nous appuyant sur ce théorème, que $\lim \frac{\sin x}{x}$ est 1 pour $x = 0$.

4°. En appliquant la même théorie, on trouve $\lim \frac{\sin^2 x}{x}$ pour $x = 0$; cette limite est 0.

On y arrive aussi de la manière suivante :

$$\lim \frac{\sin^2 x}{x} = \lim \frac{\sin x}{x} \lim \sin x = 1 \times 0 = 0.$$

On aurait de même,

$$\lim \frac{\tang x}{x} = \lim \frac{\sin x}{x} \lim \frac{1}{\cos x} = 1 \times 1 = 1.$$

5°. Limite de $\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$ pour $x = 0$.

On trouve successivement

$$\frac{\varphi'(x)}{f'(x)} = \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \frac{0}{0} \quad \text{pour } x = 0;$$

$$\frac{\varphi''(x)}{f''(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \frac{0}{0} \quad \text{pour } x = 0;$$

$$\frac{\varphi'''(x)}{f'''(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2 \quad \text{pour } x = 0.$$

La limite cherchée est donc égale à 2.

On serait parvenu à ce résultat, en remplaçant $e^x$, $e^{-x}$ et $\sin x$ par leurs développements en séries. En effet,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots,$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots;$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots;$$

donc

$$e^x - e^{-x} - 2x = 2\left(\frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \ldots\right),$$

$$x - \sin x = \frac{x^3}{1.2.3} - \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \ldots;$$

d'où

$$\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \frac{2\left(\frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \ldots\right)}{\frac{x^3}{1.2.3} - \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \ldots}.$$

Si l'on divise le numérateur et le dénominateur du second membre par $x^3$, puis qu'on fasse $x = 0$, on trouve encore

$$\lim \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = 2.$$

6°. $$\lim \frac{x^x - x}{1 - x + lx} = -2 \quad \text{pour} \quad x = 1;$$

7°. $$\lim \frac{\log x}{x - 1} = 1 \quad \text{pour } x = 1.$$

VALEUR DES EXPRESSIONS QUI PRENNENT LA FORME $\frac{\infty}{\infty}$.

**154.** Supposons que l'expression $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ prenne la forme $\frac{\infty}{\infty}$, pour $x = a$, il s'agit de déterminer la valeur de $\lim \frac{\varphi(x)}{f(x)}$; pour cela, on observe que

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{\varphi(x)}};$$

or, pour $x = a$, $\frac{1}{f(x)}$ et $\frac{1}{\varphi(x)}$ sont nuls. Donc la vraie valeur de cette expression sera la limite du quotient des dérivées de $\frac{1}{f(x)}$ et de $\frac{1}{\varphi(x)}$, et l'on aura

$$\lim \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \lim \frac{-\frac{f'(x)}{f(x)^2}}{-\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)^2}} = \lim \left[\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \times \frac{\varphi(x)}{f(x)} \times \frac{\varphi(x)}{f(x)}\right]:$$

ou, en désignant par A la limite de $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$,

$$A = \lim \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \cdot A^2,$$

d'où

$$A \quad \text{ou} \quad \lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim \frac{\varphi'(x)}{f'(x)}.$$

On retombe ainsi sur la même règle que dans le cas où

l'expression donnée devient $\frac{0}{0}$; par conséquent, si $n+1$ désigne l'ordre des dérivées de $\varphi(x)$ et de $f(x)$ qui, les premières, ne sont pas nulles ou infinies à la fois, on a

$$\lim \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{\varphi^{(n+1)}(a)}{f^{(n+1)}(a)}.$$

155. En démontrant la règle précédente, on a supposé que A ou $\lim \frac{\varphi(x)}{f(x)}$ n'était ni nulle ni infinie; je dis d'abord que la même règle subsiste quand $A = 0$. En effet, $g$ désignant une constante, l'expression

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} + g \quad \text{ou} \quad \frac{\varphi(x) + gf(x)}{f(x)},$$

deviendra encore $\frac{\infty}{\infty}$ pour $x = a$; mais comme A ou $\frac{\varphi(a)}{f(a)}$ est nulle, sa vraie valeur est $g$. Donc, d'après ce que nous venons de démontrer,

$$g = \frac{\varphi'(a) + gf'(a)}{f'(a)} = g + \frac{\varphi'(a)}{f'(a)},$$

donc

$$\frac{\varphi'(a)}{f'(a)} = 0 = A.$$

Ainsi, dans ce cas, l'application de la règle générale conduit à la vraie valeur de l'expression.

Il en résulte qu'elle y conduirait encore si A était infinie, car si $\frac{\varphi(a)}{f(a)} = \infty$, on a $\frac{f(a)}{\varphi(a)} = 0$. Donc $\frac{f'(a)}{\varphi'(a)} = 0$, et par conséquent $\frac{\varphi'(a)}{f'(a)} = \infty$.

### VALEUR DES EXPRESSIONS QUI PRENNENT LA FORME $0 \times \infty$.

156. Si l'on voulait trouver la valeur de l'expression

$\varphi(a)f(a)$, dans laquelle $\varphi(a)=0$ et $f(a)=\infty$, on remarquerait que

$$\varphi(x)f(x)=\frac{\varphi(x)}{\frac{1}{f(x)}},$$

expression qui devient $\frac{0}{0}$ pour $x=a$.

On pourrait encore poser

$$\varphi(x)f(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}},$$

qui devient $\frac{\infty}{\infty}$ pour $x=a$.

Dans les deux cas, on appliquerait les règles précédentes. On trouvera ainsi

$$\lim\left[(1-x)\operatorname{tang}\frac{\pi x}{2}\right]=\frac{2}{\pi}\quad\text{pour}\quad x=1.$$

**157.** Lorsque les dérivées de $\varphi(x)$ et $f(x)$ conduisent à des expressions qui présentent toujours la même indétermination que l'expression dont on cherche la vraie valeur, on est obligé d'avoir recours à des artifices particuliers. Celui qui réussit le plus généralement consiste à remplacer $x$ par $a+h$, à développer les fonctions par la série de Taylor, à opérer toutes les réductions et simplifications possibles, et à faire finalement, dans le résultat, $h=0$.

Ainsi $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$ devient $\frac{0}{0}$ pour $x=a$.

Le quotient des dérivées $\dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{2\sqrt{x-a}}}{\dfrac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}}$ devient $\frac{\infty}{\infty}$,

et il est évident que les dérivées suivantes donneront toujours $\frac{\infty}{\infty}$. Pour déterminer la valeur de cette expres-

sion, posons $x = a + h$; elle devient

$$\frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a} + \sqrt{h}}{\sqrt{h}\sqrt{2a+h}}.$$

Si l'on multiplie les deux termes de ce rapport par $\sqrt{a+h} + \sqrt{a}$, il vient

$$\frac{h + \sqrt{h}(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})}{\sqrt{h}\sqrt{2a+h}(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})};$$

divisant ensuite ces deux termes par $\sqrt{h}$, on a

$$\frac{\sqrt{h} + \sqrt{a+h} + \sqrt{a}}{\sqrt{2a+h}(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})},$$

expression qui, pour $h = 0$, devient

$$\frac{2\sqrt{a}}{2\sqrt{a}\,.\,\sqrt{2a}} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\sqrt{2a}}.$$

On serait encore parvenu à ce résultat, en développant $\sqrt{a+h}$ par la formule du binôme.

### VALEUR DES EXPRESSIONS QUI PRENNENT LA FORME $0^0$.

**158.** L'expression $f(x)^{\varphi(x)}$ prend une forme indéterminée lorsque les fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ s'annulent toutes les deux pour $x = a$ : mais sa valeur pourra se déduire de celle que prend $f(x) \log \varphi(x)$ pour $x = a$, d'où l'on conclura celle que l'on cherche.

Par exemple, soit à trouver pour $x = \infty$ la limite de $f(x)^{\frac{1}{x}}$. Le logarithme de cette expression est $\frac{\log f(x)}{x}$, et sa limite est celle de $\frac{f'(x)}{f(x)}$. On aura donc

$$\lim f(x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim \frac{f'(x)}{f(x)}}.$$

### EXTENSION DES RÈGLES PRÉCÉDENTES. — APPLICATIONS.

**159.** Les règles établies ci-dessus, pour trouver la valeur des expressions indéterminées, subsistent en-

encore lorsque $a$ devient infini puisqu'elles sont vraies quelque grand que soit $a$; mais la démonstration ne pourrait plus se faire de la même manière. Nous allons arriver directement à ces règles dans le cas d'une expression qui devient $\frac{0}{0}$ pour $x=\infty$. A cet effet, soit $x=\frac{1}{y}$; on aura

$$\varphi(x)=\varphi\left(\frac{1}{y}\right),\quad f(x)=f\left(\frac{1}{y}\right);$$

d'où

$$\lim\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\lim\frac{\varphi\left(\frac{1}{y}\right)}{f\left(\frac{1}{y}\right)}.$$

Or, pour $x=\infty$, on a $y=0$: donc,

$$\lim\frac{\varphi\left(\frac{1}{y}\right)}{f\left(\frac{1}{y}\right)}=\lim\frac{\varphi'\left(\frac{1}{y}\right)\left(-\frac{1}{y^2}\right)}{f'\left(\frac{1}{y}\right)\left(-\frac{1}{y^2}\right)}$$

ou bien

$$\lim\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\lim\frac{\varphi'\left(\frac{1}{y}\right)}{f'\left(\frac{1}{y}\right)}=\lim\frac{\varphi'(x)}{f'(x)}.$$

Mais avant d'appliquer les règles il faudra bien s'assurer que l'expression proposée, ainsi que $\frac{\varphi'(x)}{f'(x)}$, approche d'une limite quand $x$ tend vers l'infini. Par exemple, l'expression

$$\frac{x+\cos x}{x-\sin x}=\frac{1+\frac{\cos x}{x}}{1-\frac{\sin x}{x}},$$

tend vers 1 pour $x=\infty$, tandis que le rapport des dé-

rivées $\frac{1-\sin x}{1-\cos x}$ a une valeur complétement indéterminée quand $x=\infty$.

160. APPLICATIONS.

1°. $\lim x^n e^{-x} = \lim \frac{1.2.3\ldots n}{e^x} = 0$ pour $x=\infty$,

cette limite est encore 0, même quand $n$ n'est pas entier, comme on s'en assure en développant $e^x$ en série.

2°. $\lim x^{\frac{1}{x}} = 1$, pour $x=0$,

3°. $\lim (Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots + U)^{\frac{1}{x}} = 1$, pour $x=\infty$,

5°. $\lim (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ pour $x=0$.

# TREIZIÈME LEÇON.

**Extension du Théorème de Taylor aux fonctions de plusieurs variables. —Extension du Théorème de Maclaurin. — Propriétés des fonctions homogènes.**

---

## EXTENSION DU THÉORÈME DE TAYLOR.

**161.** Soit $u = f(x, y)$ une fonction de deux variables. Pour développer $f(x+h,\ y+k)$, on change d'abord $x$ en $x+ht$, $y$ en $y+kt$ et, dans le résultat $f(x+ht,\ y+kt)$ on fait $t = 1$.

Soit donc

$$f(x+ht, y+kt) = \varphi(t) = \mathrm{U};$$

si l'on pose, pour simplifier la notation,

$$x + ht = p \quad \text{et} \quad y + kt = q,$$

on a

$$\mathrm{U} = \varphi(t) = f(p, q).$$

Maintenant on a, d'après la série de Maclaurin,

$$\varphi(t) = \varphi(0) + t\varphi'(0) + \frac{t^2}{1.2}\varphi''(0) + \ldots + \frac{t^n}{1.2.3\ldots n}\varphi^{(n)}(0) + \mathrm{R}$$

et

$$\mathrm{R} = \frac{t^n}{1.2.3\ldots n}\left[\varphi^{(n)}(\theta t) - \varphi^{(n)}(0)\right].$$

Mais, à cause de $\varphi(t) = \mathrm{U}$,

$$\varphi'(t)\,dt = \frac{d\mathrm{U}}{dp}dp + \frac{d\mathrm{U}}{dq}dq = \left(\frac{d\mathrm{U}}{dp}h + \frac{d\mathrm{U}}{dq}k\right)dt,$$

puisque l'on a

$$dp = h\,dt,\ dq = k\,dt;$$

donc

$$\varphi'(t) = \frac{d\mathrm{U}}{dp}h + \frac{d\mathrm{U}}{dq}k.$$

Si l'on désigne $\varphi'(t)$ par $\mathrm{U}'$, $\mathrm{U}'$ sera encore une fonction de $p$ et de $q$, et l'on aura

$$\varphi''(t) = \frac{d\mathrm{U}'}{dp}h + \frac{d\mathrm{U}'}{dq}k = \frac{d^2\mathrm{U}}{dp^2}h^2 + 2\frac{d^2\mathrm{U}}{dp\,dq}hk + \frac{d^2\mathrm{U}}{dq^2}k^2.$$

Mais le dernier membre n'est autre chose que le déve-

loppement de $\left(\frac{dU}{dp}h + \frac{dU}{dq}k\right)^2$ dans lequel on aurait remplacé $dU^2$ par $d^2U$; on peut donc écrire la formule symbolique

$$\varphi''(t) = \left(\frac{dU}{dp}h + \frac{dU}{dq}k\right)^{(2)};$$

on aura de même

$$\varphi'''(t) = \left(\frac{dU}{dp}h + \frac{dU}{dq}k\right)^{(3)},$$

et, général,

$$\varphi^{(n)}(t) = \left(\frac{dU}{dp}h + \frac{dU}{dq}k\right)^{(n)}:$$

ce qu'on démontrera aisément en faisant voir (comme pour les différentielles totales des fonctions de plusieurs variables) qu'une nouvelle différentiation revient à multiplier chaque terme de l'expression symbolique par $\frac{dU}{dp}h + \frac{dU}{dq}k$, puis à changer les exposants de $dU$ en indices de différentiation.

Ainsi donc on aura généralement :

$$\varphi^{(n)}(t) = \frac{d^nU}{dp^n}h^n + n\frac{d^nU}{dp^{n-1}dq}h^{n-1}k + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{d^nU}{dp^{n-2}dq^2}h^{n-2}k^2 + \ldots$$
$$+ n\frac{d^nU}{dp\,dq^{n-1}}hk^{n-1} + \frac{d^nU}{dq^n}k^n.$$

162. Maintenant, comme

$$u = f(x,y),\quad U = f(p,q),\quad p = x + ht,\quad q = y + kt,$$

si l'on fait $t = 0$, $p$ devient égal à $x$, $q$ à $y$, $U$ à $u$, et l'on a

$$\varphi(0) = f(x,y) = u;$$
$$\varphi'(0) = \frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}k;$$
$$\varphi''(0) = \left(\frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}k\right)^{(2)};$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi^{(n)}(0) = \left(\frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}k\right)^{(n)};$$

and for $t=1$

$$R = \frac{1}{1.2.3\ldots n}\left[\varphi^{(n)}(\theta) - \varphi^{(n)}(0)\right],$$

et l'on a

$\varphi t_{t=1} =$

$$f(x+h, y+k) = u + \frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}k + \frac{1}{1.2}\left(\frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}k\right)^{(2)}$$
$$+ \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}k\right)^{(3)} + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots n}\left(\frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}k\right)^{(n)} + R.$$

On a d'ailleurs

$$R = \frac{1}{1.2\ldots n}\left[\left(\frac{dU}{dp}h + \frac{dU}{dq}k\right)^{(n)} - \left(\frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}k\right)^{(n)}\right],$$

expression dans laquelle il faut remplacer $p$ par $x + \theta h$, et $q$ par $y + \theta k$.

**163.** Comme $h$ et $k$ sont les accroissements arbitraires des variables indépendantes $x$ et $y$, on peut les remplacer par $dx$ et $dy$, ce qui change $\varphi'(0)$ en $du$, $\varphi''(0)$ en $d^2u$, etc., et il vient :

$$f(x+h, y+k) = u + du + \frac{d^2u}{1.2} + \frac{d^3u}{1.2.3} + \ldots$$
$$+ \frac{d^nu}{1.2\ldots n} + R.$$

On parviendrait de la même manière à la formule

$$(a)\quad \left\{\begin{aligned} &f(x+h, y+k, z+l\ldots) \\ &= u + du + \frac{d^2u}{1.2} + \ldots + \frac{d^nu}{1.2\ldots n} + R, \end{aligned}\right.$$

où

$$R = \frac{1}{1.2\ldots n}\left[\begin{aligned} &\left(\frac{dU}{dp}h + \frac{dU}{dq}k + \frac{dU}{dr}l + \ldots\right)^{(n)} \\ &\qquad - \left(\frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}k + \frac{du}{dz}l + \ldots\right)^{(n)} \end{aligned}\right].$$

Dans cette expression symbolique, on a

$$u = f(x, y, z\ldots), \quad U = f(p, q, r\ldots),$$
$$p = x + \theta h, \quad q = y + \theta k, \quad r = z + \theta l\ldots,$$

et $\theta$ représente une fraction positive.

Quand on reconnaît que R peut devenir plus petit que toute quantité donnée, lorsque $n$ est assez grand, la série indéfinie qui forme le second membre de ($a$) est convergente et a pour somme $f(x+h, y+k, z+l,\ldots)$. C'est la série de Taylor étendue à un nombre quelconque de variables.

**164.** On peut faire voir ici, comme pour les fonctions d'une seule variable, qu'en prenant $h$ et $k$ assez petits, un terme quelconque du développement, s'il n'est pas nul, surpassera en valeur absolue le reste de la série, à partir de ce terme.

Ainsi soit le terme

$$T_{n+1} = \frac{1}{1.2\ldots n}\left(\frac{d^n u}{dx^n}h^n + n\frac{d^n u}{dx^{n-1}\,dy}h^{n-1}k + \ldots + \frac{d^n u}{dy^n}k^n\right),$$

on a

$$\frac{R}{T_{n+1}} = \frac{\dfrac{d^n U}{dp^n} - \dfrac{d^n u}{dx^n} + n\left(\dfrac{d^n U}{dp^{n-1}\,dq} - \dfrac{d^n u}{dx^{n-1}\,dy}\right)\dfrac{k}{h} + \ldots}{\dfrac{d^n u}{dx^n} + n\,\dfrac{d^n u}{dx^{n-1}\,dy}\,\dfrac{k}{h} + \ldots},$$

après avoir divisé les deux termes de la fraction par $h^n$.

Or pour $h=0$ et $k=0$, $\dfrac{d^n U}{dp^a\,dq^{n-a}}$ devient $\dfrac{d^n u}{dx^a\,dy^{n-a}}$: donc, en prenant $h$ et $k$ assez petits, le numérateur pourra être rendu plus petit que toute quantité donnée, puisqu'il se compose de groupes de termes qui tendent séparément vers zéro, tandis que le dénominateur a une limite différente de zéro; donc, etc.

### EXTENSION DU THÉORÈME DE MACLAURIN.

**165.** Supposons que, dans le développement de $f(x+h, y+k)$ du n° 162, on fasse $x=0, y=0$. Désignons par $u_0$, $\left(\dfrac{du}{dx}\right)_0$, $\left(\dfrac{du}{dy}\right)_0$,..., ce que deviennent $u$, $\dfrac{du}{dx}$, $\dfrac{du}{dy}$,..., pour $x=0$, $y=0$.

On aura

$$\left\{\begin{aligned} f(h,k) &= u_0 + \left(\frac{du}{dx}\right)_0 h + \left(\frac{du}{dy}\right)_0 k \\ &+ \left[\left(\frac{du}{dx}\right)_0 h + \left(\frac{du}{dy}\right)_0 k\right]^{(2)} + \ldots + \mathrm{R}. \end{aligned}\right.$$

Cette formule deviendra, en remplaçant $h$ par $x$, $k$ par $y$,

$$(b)\quad \left\{\begin{aligned} f(x,y) &= u_0 + \left(\frac{du}{dx}\right)_0 x + \left(\frac{du}{dy}\right)_0 y \\ &+ \left[\left(\frac{du}{dx}\right)_0 x + \left(\frac{du}{dy}\right)_0 y\right]^{(2)} + \ldots + \mathrm{R}, \end{aligned}\right.$$

et l'on aura

$$\mathrm{R} = \frac{1}{1.2.3\ldots n}\left[\left(\frac{du}{dp}h + \frac{du}{dq}k\right)_0^{(n)} - \left(\frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}k\right)_0^{(n)}\right]:$$

expression dans laquelle on doit faire $x = 0$, $y = 0$, et remplacer $h$ par $x$, $k$ par $y$, $p$ par $\theta x$ et $q$ par $\theta y$. Lorsque R tend vers 0 à mesure que $n$ augmente, le second membre de ($b$) donne lieu à une série convergente qui a pour somme $f(x,y)$. C'est la série de Maclaurin étendue aux fonctions de deux variables. On l'étendrait de la même manière aux fonctions d'un nombre quelconque de variables.

### FONCTIONS HOMOGÈNES.

**166.** Une fonction est dite *homogène,* lorsqu'en multipliant les variables qu'elle contient par un même facteur, le résultat est égal à la valeur primitive de la fonction multipliée par une certaine puissance de ce facteur. Ainsi $f(x, y, z)$ sera une fonction homogène si l'on a

$$f(tx, ty, tz) = t^m f(x, y, z);$$

$m$ est dit le degré de la fonction.

**167.** *Si l'on divise une fonction homogène de degré* m *par une des variables élevée à la puissance* m, *la fonction ne dépendra plus que des rapports des autres variables à celle-ci.*

En effet, posons $tx = 1$, on aura $t = \frac{1}{x}$, et la relation

$$f(tx, ty, tz) = t^m f(x, y, z)$$

devient

$$f\left(1, \frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) = \frac{f(x, y, z)}{x^m}.$$

*Réciproquement*, si cette condition est remplie, la fonction est homogène. En effet, si

$$f(x, y, z) = x^m \varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right),$$

on a

$$f(tx, ty, tz) = t^m x^m \varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right).$$

Éliminant la fonction $\varphi$, il vient

$$f(tx, ty, tz) = t^m f(x, y, z),$$

ce qui démontre que la fonction $f(x, y, z)$ est homogène.

168. *Les dérivées partielles et du premier ordre de toute fonction homogène du degré* m, f(x, y, z), *sont des fonctions homogènes du degré* (m — 1).

Soit, en effet, $\frac{df(x, y, z)}{dx} = \varphi(x, y, z)$; on a (166)

$$f(tx, ty, tz) = t^m f(x, y, z);$$

d'où, en prenant la dérivée par rapport à $x$,

$$\varphi(tx, ty, tz)\, t = t^m \varphi(x, y, z);$$

ce qui revient à

$$\varphi(tx, ty, tz) = t^{m-1} \varphi(x, y, z);$$

donc $\varphi(x, y, z)$ ou $\frac{df(x, y, z)}{dx}$ est une fonction homogène du degré $m - 1$.

169. Pour toute fonction homogène, on a

$$f(tx, ty, tz) = t^m f(x, y, z);$$

posons

$$t = 1 + \alpha.$$

On aura, $u$ désignant $f(x, y, z)$,

$$(a)\qquad f(x + \alpha x,\ y + \alpha y,\ z + \alpha z) = (1 + \alpha)^m u.$$

Or, la série de Taylor pour les fonctions de plusieurs variables, donne

$$\begin{aligned} &f(x + \alpha x,\ y + \alpha y,\ z + \alpha z) \\ &= u + \alpha\left(\frac{du}{dx}x + \frac{du}{dy}y + \frac{du}{dz}z\right) + \frac{\alpha^2}{1.2}\left(\frac{du}{dx}x + \frac{du}{dy}y + \frac{du}{dz}z\right)^{(2)} + \ldots, \end{aligned}$$

puis le développement du binôme donne

$$(1 + \alpha)^m u = u + mu\alpha + \frac{m(m-1)}{1.2}u\alpha^2 + \ldots.$$

Or, comme $(a)$ est une identité, il en résulte que

$$(1)\qquad \frac{du}{dx}x + \frac{du}{dy}y + \frac{du}{dz}z = mu,$$

$$(2)\qquad \left(\frac{du}{dx}x + \frac{du}{dy}y + \frac{du}{dz}z\right)^{(2)} = m(m-1)u,$$

$$(3)\qquad \left(\frac{du}{dx}x + \frac{du}{dy}y + \frac{du}{dz}z\right)^{(3)} = m(m-1)(m-2)u,$$

..........................................

La relation (1), la plus importante, montre que *la somme des dérivées partielles d'une fonction homogène, multipliées respectivement par la variable correspondante, est égale à la fonction multipliée par son degré.* Vol II p167.

170. Exemple.

$$u = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Exz + 2Fxy,$$

on a
$$\frac{du}{dx} = 2Ax + 2Ez + 2Fy,$$

$$\frac{du}{dy} = 2By + 2Dz + 2Fx,$$

$$\frac{du}{dz} = 2Cz + 2Dy + 2Ex,$$

d'où
$$x\frac{du}{dx}+y\frac{du}{dy}+z\frac{du}{dz}$$
$$=2(Ax^2+By^2+Cz^2+2Dyz+2Exz+2Fxy)=2u.$$

**171.** On peut obtenir l'identité (1) directement comme il suit.

Posant $tx=p,\quad ty=q,\quad tz=r,$

on a
$$f(p,q,r)=t^m f(x,y,z);$$

d'où il résulte, si l'on prend la dérivée des deux membres par rapport à $t$,
$$\frac{df(p,q,r)}{dp}x+\frac{df(p,q,r)}{dq}y+\frac{df(p,q,r)}{dr}z$$
$$=mt^{m-1}f(x,y,z).$$

Cette identité a lieu pour toutes les valeurs de $t$; or si $t=1$,
$$\frac{df(p,q,r)}{dp},\quad \frac{df(p,q,r)}{dq},\quad \frac{df(p,q,r)}{dr},$$
deviennent respectivement
$$\frac{du}{dx},\qquad \frac{du}{dy},\qquad \frac{du}{dz},$$
donc

(1) $$x\frac{du}{dx}+y\frac{du}{dy}+z\frac{du}{dz}=mu.$$

**172.** Pour démontrer directement la relation (2), il faut différentier (1) par rapport à $x$, à $y$ et à $z$; ce qui donne les équations
$$x\frac{d^2u}{dx^2}+y\frac{d^2u}{dx\,dy}+z\frac{d^2u}{dz\,dx}+\frac{du}{dx}=m\frac{du}{dx},$$
$$x\frac{d^2u}{dx\,dy}+y\frac{d^2u}{dy^2}+z\frac{d^2u}{dy\,dz}+\frac{du}{dy}=m\frac{du}{dy},$$
$$x\frac{d^2u}{dx\,dz}+y\frac{d^2u}{dy\,dz}+z\frac{d^2u}{dz^2}+\frac{du}{dz}=m\frac{du}{dz}.$$

Ajoutons ces équations respectivement multipliées par $x$, $y$, $z$, puis retranchons des deux membres de l'équation résultante la quantité

$$\frac{du}{dx}x + \frac{du}{dy}y + \frac{du}{dz}z,$$

il viendra

$$m(m-1)u = \left(\frac{du}{dx}x + \frac{du}{dy}y + \frac{du}{dz}z\right)^{(2)}.$$

On obtiendrait de la même manière les équations suivantes.

---

# QUATORZIÈME LEÇON.

**Maximums et minimums des fonctions d'une *seule* variable indépendante. — Applications. — Maximums et minimums d'une fonction implicite.**

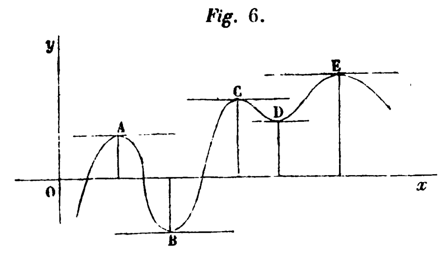
## MAXIMUMS ET MINIMUMS DES FONCTIONS D'UNE SEULE VARIABLE INDÉPENDANTE.

**173.** Soit $f(x)$ une fonction d'une seule variable $x$. Si, en faisant croître $x$, la fonction prend une valeur réelle qui surpasse celles qui la précèdent et celles qui la suivent immédiatement, cette valeur de la fonction est dite un *maximum*. On appelle *minimum* une valeur moindre que les valeurs voisines.

Si $f(x)$ devient un maximum pour $x = a$, la différence $f(a+h) - f(a)$ sera *négative*, quel que soit le signe de $h$, pourvu qu'on prenne $h$ suffisamment petit. Cette différence serait *positive* si $f(a)$ était un minimum.

**174.** Une fonction peut avoir plusieurs maximums et minimums, lesquels doivent se succéder alternativement. Un maximum peut être moindre qu'un minimum. Un maximum négatif devient un minimum quand on fait abstraction de son signe, et de même un minimum négatif pris positivement devient un maximum. Ces diverses conséquences de la définition sont rendues manifestes par l'inspection de la courbe sinueuse ABCDE. Soit $y = f(x)$ l'équation de cette courbe; les valeurs maximums et minimums de $f(x)$ sont évidemment les ordonnées des points A, B, etc., où la tangente est parallèle à l'axe des $x$. On voit que l'or-

*Fig.* 6.



donnée du point A, qui est un maximum, est moindre que l'ordonnée du point D, qui est un minimum, et que l'ordonnée du point B, qui est un maximum en valeur absolue, est un minimum quand on la prend avec son signe.

175. On sait que la fonction $f(x)$ croît continuellement lorsqu'en faisant croître $x$, dans un certain intervalle, la dérivée $f'(x)$ reste constamment positive, et que $f(x)$ décroît au contraire quand la dérivée est négative. La fonction $f(x)$ ne devient donc ni *maximum* ni *minimum* tant que, $x$ croissant, la fonction dérivée conserve le même signe. Mais si la dérivée change de signe lorsque $x$ atteint et dépasse une certaine valeur $a$, alors la fonction $f(x)$ deviendra, pour cette valeur, un *maximum* si la dérivée passe *du positif au négatif*, ou un *minimum* si la dérivée passe *du négatif au positif*. Cette dérivée ne peut d'ailleurs changer de signe qu'en s'évanouissant, ou bien encore en devenant discontinue ou infinie. Ainsi, les valeurs de $x$ qui rendent $f(x)$ maximum ou minimum, sont uniquement celles pour lesquelles $f'(x)$ devient nulle, infinie ou discontinue en changeant de signe.

176. Ordinairement le maximum et le minimum répondent à des valeurs de $x$ pour lesquelles la fonction dérivée change de signe en s'évanouissant et en restant finie et continue. Dans ce cas, on peut établir les conditions du maximum et celles du minimum à l'aide de la série de Taylor. On a d'abord

$$f(x+h)-f(x)=hf'(x)+\mathrm{R}.$$

Si $f'(x)$ n'est pas nulle, la différence $f(x+h)-f(x)$ a le même signe que $hf'(x)$. Cette différence change donc de signe avec $h$; donc $f(x)$ n'est, dans ce cas, ni maximum ni minimum.

Mais si $f'(x)$ est nulle, on a

$$f(x+h)-f(x)=\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\mathrm{R};$$

alors, quel que soit le signe de $h$, $f(x+h)-f(x)$ a le même signe que $f''(x)$. Donc si $f''(x)$ est positive pour la valeur de $x$ que l'on considère et qui annule $f'(x)$, $f(x)$ est un minimum, et si $f''(x)$ est négative, $f(x)$ est un maximum.

Mais si $f''(x)$ est nulle, on aura

$$f(x+h)-f(x)=\frac{h^3}{1.2.3}f'''(x)+\mathrm{R};$$

et si $f'''(x)$ n'est pas nulle, $f(x+h)-f(x)$ changera de signe avec $h$ : $f(x)$ ne sera ni maximum ni minimum.

Si $f'''(x)=0$, on aura

$$f(x+h)-f(x)=\frac{h^4}{1.2.3.4}f^{\text{IV}}(x)+\mathrm{R},$$

et $f(x)$ est un minimum ou un maximum selon que $f^{\text{IV}}(x)$ est positive ou négative pour la valeur de $x$ qui annule $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, et ainsi de suite.

**177.** En général, *si une valeur de* x *annule quelques-unes des dérivées successives* f'(x), f''(x),..., *et si la première dérivée qu'elle n'annule pas est d'ordre pair, la fonction* f(x) *est un minimum ou un maximum, selon que cette dérivée est positive ou négative; mais il n'y a ni maximum ni minimum si la première dérivée qui ne s'annule pas est d'ordre impair.*

**178.** Cette règle s'accorde avec celle que nous avons donnée plus haut (n° **175**); car si, par exemple, les trois premières dérivées s'annulent, on aura, en appliquant la série de Taylor à la dérivée

$$f'(x)=\frac{h^3}{1.2.3}f^{\text{IV}}(x)+\mathrm{R}',$$

et l'on voit bien que $f'(x)$ changera de signe avec $h$. Il est clair que $f'(x)$ ne changerait pas de signe avec $h$ si la première dérivée qui ne s'annule pas était d'ordre impair.

APPLICATIONS.

**179.** Nous allons maintenant appliquer cette théorie à quelques exemples.

1°. *Minimum de $x^x$.* Comme il revient au même de faire cette recherche sur le logarithme népérien de cette expression, posons

$$f(x) = \mathrm{l}.x^x = x\,\mathrm{l}x\,;$$

on aura $\quad f'(x) = 1 + \mathrm{l}x \quad$ et $\quad f''(x) = \frac{1}{x}.$

Or si l'on fait $\quad 1 + \mathrm{l}x = 0,$

on a $\quad \mathrm{l}x = -1 \quad$ d'où $\quad x = e^{-1} = \frac{1}{e}.$

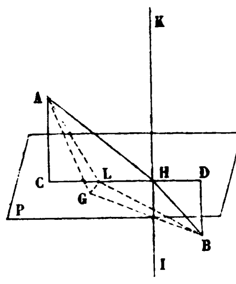
Reste à savoir si $f\left(\frac{1}{e}\right)$ ou $\frac{1}{e}\,\mathrm{l}\left(\frac{1}{e}\right)$, et par suite $\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$ est bien un maximum ou un minimum. Or, comme

$$f''\left(\frac{1}{e}\right) = e > 0,$$

on en conclut que $x^x$ a un minimum qui répond à $x = \frac{1}{e}.$

2°. *On donne deux points* A *et* B, *situés dans deux milieux différents, séparés par une surface plane* P. *Un mobile se meut dans le premier milieu avec une vitesse uniforme* u, *et dans le second milieu avec une vitesse uniforme* v ; *on demande le chemin* AHB *que ce mobile doit suivre pour se rendre de* A *en* B *dans le temps le plus court.*

Fig. 7.




Il est clair d'abord que ce chemin devra être composé de lignes droites. Je dis ensuite que la ligne brisée qui résout le problème doit être dans le plan ABCD, conduit par les perpendiculaires AC, BD au plan P. En effet,

supposons que cette ligne soit AGB et qu'elle rencontre le plan P au point G non situé dans le plan ABCD. Menons GL perpendiculaire à CD, et joignons AL et BL. Les triangles AGL et BGL étant rectangles en L, on a $AL < AG$ et $BL < BG$; par suite, le mobile ira plus rapidement de A à B en suivant le chemin ALB qu'en suivant le chemin AGB.

Cherchons donc, dans le plan ABCD, perpendiculaire au plan P, la ligne AHB, qui est parcourue par le mobile dans le moindre temps possible. Soient

$$AC = a, \quad BD = b, \quad CD = c \quad \text{et} \quad CH = x;$$

le temps que le mobile emploiera pour aller de A en H sera $\frac{AH}{u} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{u}$, et celui qu'il mettra pour aller de H en B sera $\frac{BH}{v} = \frac{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}{v}$; par suite, la fonction qu'il s'agit de rendre un minimum est

$$f(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{u} + \frac{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}{v}.$$

Posons donc

$$f'(x) \text{ ou } \frac{x}{u\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{c - x}{v\sqrt{b^2 + (c-x)^2}} = 0,$$

ou bien

$$\frac{x}{u\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{c - x}{v\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}.$$

Si l'on voulait tirer de cette équation la valeur de $x$, il faudrait en élever les deux membres au carré, et l'on aurait ensuite à résoudre une équation du quatrième degré. Mais comme

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \sin CAH = \sin AHK,$$

$$\frac{c - x}{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}} = \sin HBD = \sin BHI,$$

on voit que, dans le cas du minimum [la fonction $f(x)$ n'a pas évidemment de maximum] on a

$$\frac{\sin \mathrm{AHK}}{u} = \frac{\sin \mathrm{BHI}}{v} \quad \text{ou} \quad \frac{\sin \mathrm{AHK}}{\sin \mathrm{BHI}} = \frac{u}{v}.$$

Dans la théorie de la lumière, cette quantité $\frac{u}{v}$, rapport des vitesses de la lumière dans les deux milieux, est l'indice de la réfraction de la lumière, au passage du premier milieu dans le second.

3°. $$f(x) = e^x + 2\cos x + e^{-x},$$

on a

$$f'(x) = e^x - 2\sin x - e^{-x},$$
$$f''(x) = e^x - 2\cos x + e^{-x}.$$

Si l'on égale $f'(x)$ à o, on a $x = 0$, valeur qui, substituée dans $f(x)$, donne $f(0) = 4$.

Pour savoir si c'est un maximum ou un minimum, substituons o à la place de $x$ dans $f''(x)$. Comme $f''(0) = 0$, il faut aller plus loin. Or

$$f'''(x) = e^x + 2\sin x - e^{-x} \quad \text{et} \quad f^{\text{IV}}(x) = e^x + 2\cos x + e^{-x},$$

d'où l'on tire

$$f'''(0) = 0 \quad \text{et} \quad f^{\text{IV}}(0) = 4;$$

donc $f(0) = 4$ est un minimum de $f(x)$.

4°. *Trouver la distance minimum d'un point donné* M $(a, b)$ *à une courbe dont on connaît l'équation*

(1) $$y = f(x).$$

Joignons MK, K étant un point quelconque de la courbe. On aura

$$\overline{\mathrm{MK}}^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2.$$

En égalant à zéro la différentielle de cette expression, nous aurons

$$(x-a) + (y-b)\frac{dy}{dx} = 0,$$

équation qui revient à

$$(2) \qquad \frac{y-b}{x-a}\cdot\frac{dy}{dx}+1=0.$$

Or cette relation entre $\frac{dy}{dx}$, coefficient angulaire de la tangente à la courbe donnée au point $(x, y)$, et $\frac{y-b}{x-a}$, coefficient angulaire de la droite MK, montre que ces deux droites sont perpendiculaires entre elles. Donc la droite minimum doit couper la courbe donnée à angle droit.

Si la distance MK était susceptible d'un maximum, on le trouverait encore par la résolution des équations (1) et (2). Supposons en particulier que la courbe $y=f(x)$ soit le cercle dont l'équation est

$$x^2+y^2=r^2.$$

On aura alors $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$, et la relation (2) deviendra

$$1-\frac{y-b}{x-a}\cdot\frac{x}{y}=0,$$

ou bien, après réduction,

$$y=\frac{b}{a}x.$$

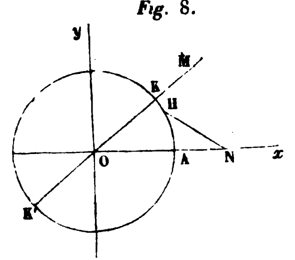


*Fig.* 8.

Ainsi, pour déterminer $x$ et $y$, nous aurons les deux équations

$$x^2+y^2=r^2,$$
$$y=\frac{b}{a}x,$$

qui, prises simultanément, représentent les points d'intersection du cercle donné avec la droite MO. Alors KM sera la ligne minimum, et K′M la ligne maximum,

comme on le verra facilement en considérant les dérivées suivantes.

Mais il se présente ici une singularité que l'on peut cependant expliquer par la définition même que l'on a donnée des maximums et des minimums.

Supposons que le point donné soit le point N situé sur l'axe des abscisses à une distance $a$ du centre. Le carré de la distance NH sera représenté par l'expression

$$y^2 + (x - a)^2,$$

ou bien par

$$r^2 - 2ax + a^2.$$

Or la dérivée de cette expression est une quantité constante $(-2a)$ qui, par conséquent, ne peut être égalée à zéro. Ainsi, quoiqu'il existe une distance minimum qui est NA, on ne l'obtient pas par notre procédé. Cela vient de ce que, d'après la définition, une fonction est minimum pour une certaine valeur de la variable, lorsqu'elle augmente pour des valeurs plus grandes et plus petites de cette variable. Or, si NH est considérée comme une fonction de $x$, NA n'est plus un minimum dans le sens que nous venons de dire, puisque cette fonction, réelle pour des valeurs de $x$ moindres que $r$, devient imaginaire pour des valeurs plus grandes.

5°. $f(x) = x^m (b - x)^n$.

Cette fonction est nulle pour $x = 0$ et pour $x = b$. Il est clair qu'entre les deux valeurs $0$ et $b$, il y en aura au moins une pour laquelle elle sera maximum ; en prenant la dérivée, on aura

$$f'(x) = mx^{m-1}(b - x)^n - nx^m (b - x)^{n-1},$$

$$= x^{m-1}(b - x)^{n-1}(mb - mx - nx).$$

Il faudra donc poser

$$x^{m-1}(b - x)^{n-1}[mb - (m + n)x] = 0,$$

ce qui donne les trois valeurs

$$x = \frac{mb}{m+n}, \quad x = b, \quad x = 0.$$

A la première correspondra un maximum, comme on a déjà pu le voir, mais on peut le vérifier directement, car la dérivée passe évidemment du positif au négatif quand $x$ dépasse la valeur $\frac{mb}{m+n}$.

Si $m$ est pair, à la valeur o correspondra une valeur minimum de la fonction, mais dans ce cas seulement. En effet, pour des valeurs positives ou négatives très-voisines de zéro, les facteurs de la dérivée $(b-x)^{n-1}$ et $mb-(m+n)x$ sont toujours positifs, tandis que le facteur $x^{m-1}$ passe du négatif au positif, puisque $m$ est pair : la fonction sera un minimum dans ce cas. Mais si $m$ est impair, aucun des facteurs de la dérivée ne changera de signe, et il n'y aura ni maximum ni minimum.

On verra de même qu'à la valeur $b$, il correspondra un minimum si $n$ est pair, et qu'il n'y aura ni maximum ni minimum pour $x=b$, si $n$ est impair.

### MAXIMUMS ET MINIMUMS DES FONCTIONS IMPLICITES D'UNE SEULE VARIABLE INDÉPENDANTE.

**180.** Soit

$$y^2 - 2mxy + x^2 = a,$$

où $y$ est une fonction de $x$ déterminée par cette équation. On peut trouver les maximums et les minimums de $y$ sans être obligé de résoudre l'équation. En effet, la différentiation de cette équation donne

$$(y - mx)\frac{dy}{dx} - my + x = 0,$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = \frac{my - x}{y - mx},$$

Comme les valeurs de $x$ qui répondent à des maximums ou à des minimums de $y$ doivent satisfaire à la condition

$$\frac{dy}{dx} = 0,$$

on aura ces valeurs en résolvant les deux équations

$$y^2 - 2mxy + x^2 = a, \quad x - my = 0.$$

**181.** Supposons, pour plus de généralité, que l'on ait

$$(1) \qquad \begin{cases} f(x, y, z, u) = 0, \\ \varphi(x, y, z, u) = 0, \\ \psi(x, y, z, u) = 0. \end{cases}$$

L'une quelconque des variables, $x$ par exemple, pourra être prise pour variable indépendante; les trois autres seront alors des fonctions de celle-ci. Considérons en particulier la fonction $u$. Pour trouver les valeurs de $x$, ainsi que les valeurs correspondantes de $y$ et de $z$, qui donnent des maximums ou des minimums de $u$, on observe que, dans le cas ordinaire du maximum ou du minimum, on a

$$\frac{du}{dx} = 0.$$

D'après cela, la différentiation immédiate des équations (1) donne, en y regardant $y$, $z$ et $u$ comme des fonctions de $x$ et supprimant les termes où entre $\frac{du}{dx}$,

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{df}{dx} + \dfrac{df}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dx} + \dfrac{df}{dz} \cdot \dfrac{dz}{dx} = 0, \\[2ex] \dfrac{d\varphi}{dx} + \dfrac{d\varphi}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dx} + \dfrac{d\varphi}{dz} \cdot \dfrac{dz}{dx} = 0, \\[2ex] \dfrac{d\psi}{dx} + \dfrac{d\psi}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dx} + \dfrac{d\psi}{dz} \cdot \dfrac{dz}{dx} = 0. \end{cases}$$

En éliminant $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{dz}{dx}$ entre ces trois équations, on arrive à une équation,

$$(3) \qquad F(x,y,z,u)=0,$$

qui, jointe aux équations (1), détermine les valeurs de $x, y, z$ et $u$, qui peuvent répondre à des maximums ou à des minimums de $u$.

L'élimination de $\frac{dy}{dx}$ et de $\frac{dz}{dx}$ entre les équations (2) peut se faire en multipliant ces équations respectivement par 1, $\lambda$ et $\mu$, ajoutant le tout et choisissant les indéterminées $\lambda$ et $\mu$ de manière que les coefficients de $\frac{dy}{dx}$ et de $\frac{dz}{dx}$ soient nuls dans le résultat. On remplace ainsi les équations (2) par celles-ci :

$$(4) \qquad \left\{\begin{array}{l} \frac{df}{dx}+\lambda\frac{d\varphi}{dx}+\mu\frac{d\psi}{dx}=0, \\ \frac{df}{dy}+\lambda\frac{d\varphi}{dy}+\mu\frac{d\psi}{dy}=0, \\ \frac{df}{dz}+\lambda\frac{d\varphi}{dz}+\mu\frac{d\psi}{dz}=0. \end{array}\right.$$

L'élimination de $\lambda$ et de $\mu$ conduit quelquefois plus rapidement à l'équation (3) que celle de $\frac{dy}{dx}$ et de $\frac{dz}{dx}$ entre les équations (2).

**182.** On pourrait avoir à déterminer les maximums ou les minimums d'une fonction explicite $F(x, y, z, u)$, $x, y, z$ et $u$ étant des variables liées entre elles par les équations

$$\left\{\begin{array}{l} f(x,y,z,u)=0, \\ \varphi(x,y,z,u)=0, \\ \psi(x,y,z,u)=0. \end{array}\right.$$

D'après cela, l'une des variables, $x$ par exemple, pourra être regardée comme indépendante; $y$, $z$, $u$, $F(x, y, z, u)$, seront alors des fonctions de $x$.

Pour résoudre cette nouvelle question, il suffit de remarquer qu'elle est un cas particulier de la précédente, savoir celui dans lequel la fonction implicite, dont on cherche les maximums et les minimums, n'entre que dans une seule des équations (1).

# QUINZIÈME LEÇON.

**Maximums et minimums des fonctions explicites ou implicites de *plusieurs* variables indépendantes. — Notions sur les infiniment petits.**

---

## MAXIMUMS ET MINIMUMS DES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES INDÉPENDANTES.

**183.** On dit qu'une valeur particulière et réelle d'une fonction de plusieurs variables indépendantes $f(x, y, z)$ est un maximum quand elle surpasse toutes les valeurs voisines de cette fonction, c'est-à-dire celles qu'on obtiendrait en donnant aux variables des valeurs très-peu différentes de celles que l'on considère. On appelle minimum une valeur particulière de la fonction moindre que toutes les valeurs voisines. La différence $\Delta u$ ou

$$f(x+h, y+k, z+l) - f(x, y, z)$$

devra donc être constamment *négative* pour des valeurs suffisamment petites et aussi petites que l'on voudra, de $h$, $k$ et $l$, quand $f(x, y, z)$ est un maximum, quels que soient les signes de $h$, $k$ et $l$; au contraire, cette différence est constamment *positive* quand $f(x, y, z)$ est un minimum.

Supposons que la fonction $u = f(x, y, z)$ soit un maximum ou un minimum pour $x = a$, $y = b$, $z = c$. Si dans cette fonction on attribue à $y$ et à $z$ les valeurs fixes $b$ et $c$, elle devra être un maximum ou un minimum pour $x = a$. Par conséquent, il faudra que, pour $x = a$, $y = b$, $z = c$, $\frac{du}{dx}$ soit nulle, infinie ou discontinue. On dira la même chose de $\frac{du}{dy}$ et de $\frac{du}{dz}$. Donc les valeurs de $x, y, z$ qui rendent $u$ maximum ou minimum se trouvent parmi celles qui rendent les dérivées $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, $\frac{du}{dz}$ nulles, infinies ou discontinues.

**184.** En se bornant au cas où ces dérivées sont continues, on peut s'aider de la série de Taylor pour distinguer, parmi les solutions du système,

$$\frac{du}{dx}=0,\quad \frac{du}{dy}=0,\quad \frac{du}{dz}=0,$$

celles qui répondent à des maximums ou à des minimums. En effet, on a $\Delta u$ ou

$$f(x+h,y+k,z+l)-f(x,y,z)=\frac{du}{dx}h+\frac{du}{dy}k+\frac{du}{dz}l+R.$$

Or il a été démontré que l'on peut toujours prendre $h$, $k$ et $l$ assez petits pour que la somme des valeurs absolues des termes qui contiennent $h$, $k$ et $l$ à un même degré surpasse la valeur absolue du reste R correspondant, et, comme dans la question qui nous occupe on doit regarder $h$, $k$ et $l$ comme pouvant être plus petits que toute quantité donnée, et en même temps comme ayant des signes quelconques, il suit de là : 1° que le signe de $\Delta u$ doit être le même que celui de

$$\frac{du}{dx}h+\frac{du}{dy}k+\frac{du}{dz}l;$$

2° que si l'on n'avait pas à la fois

$$\frac{du}{dx}=0,\quad \frac{du}{dy}=0,\quad \frac{du}{dz}=0,$$

$f(x,y,z)$ ne pourrait être ni un maximum ni un minimum, puisqu'en changeant simplement les signes de $h$, $k$ et $l$, le signe de $\frac{du}{dx}h+\frac{du}{dy}k+\frac{du}{dz}l$, et, par suite, celui de $\Delta u$ changerait aussi. On retombe donc ainsi sur les conditions précédemment obtenues.

**185.** Cherchons maintenant quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que $f(x,y,z)$ soit un minimum ou un maximum.

La différentielle totale du premier ordre étant nulle,

on aura

$$\Delta u = \frac{1}{1.2}(Ah^2 + Bk^2 + Cl^2 + 2Dhk + 2Ehl + 2Fkl) + R,$$

ou bien $$\Delta u = \frac{1}{2} d^2 u + R.$$

Admettons d'abord que A, B, C, D, E, F, qui, pour abréger, désignent les dérivées partielles du second ordre, $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^2u}{dy^2}$, etc., ne soient pas tous nuls à la fois pour les valeurs de $x$, $y$, $z$ considérées, c'est-à-dire celles qui annulent les dérivées du premier ordre $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, $\frac{du}{dz}$.

Si $d^2u$ n'est pas identiquement nulle, il peut arriver trois cas : 1° $d^2u$ pourra changer de signe, alors il n'y aura ni maximum ni minimum : 2° $d^2u$ conservera toujours le même signe, alors $u$ sera maximum ou minimum selon que $d^2u$ sera négative ou positive; 3° $d^2u$ sera nulle pour certaines valeurs de $h$, $k$, $l$, mais sans jamais changer de signe. Alors on ne peut dire si la fonction est un maximum ou minimum, et pour avoir une conclusion, il faudrait pousser plus loin le développement de $\Delta u$.

Nous nous contenterons de chercher les conditions nécessaires et suffisantes pour que $d^2u$ ou la fonction

$$Ah^2 + Bk^2 + Cl^2 + 2Dhk + 2Ekl + 2Fkl$$

soit constamment positive, quels que soient les signes de $h$, $k$, $l$, pour de très-petites valeurs de ces trois quantités. Mais comme cette expression est une fonction homogène de $h$, $k$ et $l$, on voit, en la mettant sous la forme de

$$h^2\left(A + B\frac{k^2}{h^2} + C\frac{l^2}{h^2} + 2D\frac{k}{h} + 2E\frac{l}{h} + 2F\frac{k}{h}\cdot\frac{l}{h}\right),$$

que, si elle est positive pour de très-petites valeurs de $h$, $k$, $l$, elle le sera aussi pour des valeurs aussi grandes que l'on voudra de ces variables, pourvu que leurs rapports ne changent pas. Ainsi, il sera nécessaire et suffi-

sant que cette expression

$$Ah^2 + Bk^2 + \ldots + 2Fkl$$

soit positive pour toutes les valeurs réelles possibles de $h$, $k$ et $l$.

Observons maintenant que si l'un des coefficients des carrés, A par exemple, était nul, les coefficients des termes qui contiennent $h$, c'est-à-dire D et E, seraient aussi nuls. En effet, dans ce cas, on a

$$d^2u = Ph + Q,$$

en posant

$$P = 2(Dk + El), \qquad Q = Bk^2 + Cl^2 + 2Fkl,$$

P et Q étant indépendants de $h$; si, après avoir donné des valeurs arbitraires à $k$ et à $l$, on fait

$$h = -\frac{Q}{P} + \alpha, \quad \text{puis ensuite} \quad h = -\frac{Q}{P} - \alpha,$$

les résultats de cette substitution sont $P\alpha$ dans le premier cas, et $-P\alpha$ dans le second. Donc, si P n'était pas nul identiquement, $d^2u$ pourrait changer de signe. Par conséquent, l'égalité $A = 0$ entraîne les suivantes :

$$D = 0, \quad E = 0.$$

Il résulte de là que les coefficients A, B, C, et même deux d'entre eux ne sont pas nuls à la fois; car s'il en était ainsi, la fonction $d^2u$ s'annulerait d'elle-même, ce qui est contraire à la supposition que nous avons faite au commencement.

Supposons donc que A, par exemple, ne soit pas nul; je dis que l'on aura $A > 0$; car si l'on pose $k = 0$ et $l = 0$, la fonction se réduit au terme $Ah^2$ qui, pour être positif, exige que A soit $> 0$. Une première condition nécessaire dans le cas du minimum est donc

(1) $$A > 0.$$

Maintenant, on peut écrire $d^2u$ ou la fonction

$$Ah^2 + Bk^2 + Cl^2 + 2Dhk + 2Ehl + 2Fkl$$

sous la forme

$$A\left(h^2 + 2h\frac{Dk + El}{A}\right) + Bk^2 + Cl^2 + 2Fl,$$

ou bien encore, en complétant le carré dont les deux premiers termes sont dans la parenthèse,

$$A\left(h+\frac{Dk+El}{A}\right)^2 - \frac{D^2k^2+2EDkl+E^2l^2}{A} + Bk^2+Cl^2+2Fkl$$

$$=A\left(h+\frac{Dk+El}{A}\right)^2 + \left(B-\frac{D^2}{A}\right)k^2 + \left(C-\frac{E^2}{A}\right)l^2 + 2\left(F-\frac{ED}{A}\right)kl.$$

Si l'on pose, pour abréger,

$$B-\frac{D^2}{A}=G, \quad C-\frac{E^2}{A}=I, \quad F-\frac{ED}{A}=M,$$

on devra donc avoir, pour toutes les valeurs de $h$, $k$, $l$,

$$A\left(h+\frac{Dk+El}{A}\right)^2 + Gk^2 + Il^2 + 2Mkl > 0.$$

Si G était nul, la fonction considérée se réduirait pour

$$h = -\frac{Dk+El}{A}$$

à

$$Il^2 + 2Mkl.$$

Ce binôme ne peut être positif pour toutes les valeurs de $l$ et de $k$ que si $M=0$; mais $d^2u$ pouvant alors être mis sous la forme

$$A\left(h+\frac{Dk+El}{A}\right)^2 + Il^2,$$

cette différentielle s'annulerait pour la valeur $l=0$ jointe à une infinité d'autres valeurs de $k$ et de $l$, cas particulier que nous avons écarté.

Soit donc G différent de o : si l'on fait

$$l=0 \quad \text{et} \quad h=-\frac{D}{A}k,$$

la fonction se réduit à $Gk^2$, et comme ce résultat doit être

positif pour toutes les valeurs de $k$, on en déduit que G doit être $> 0$. Ainsi, une seconde condition, nécessaire dans le cas du minimum, est

$$(2) \qquad G > 0.$$

Maintenant, en faisant abstraction du premier terme, le reste du polynôme pourra s'écrire

$$G\left(k^2 + \frac{2Mkl}{G}\right) + Il^2,$$

ou, en complétant le carré dans la parenthèse,

$$G\left(k + \frac{Ml}{G}\right)^2 - \frac{M^2 l^2}{G} + Il^2 = G\left(k + \frac{Ml}{G}\right)^2 + Nl^2,$$

en posant, pour abréger,

$$N = I - \frac{M^2}{G}.$$

En sorte que, finalement, $d^2 u$ pourra être mise sous la forme

$$A\left(h + \frac{Dk + El}{A}\right)^2 + G\left(k + \frac{Ml}{G}\right)^2 + Nl^2,$$

et l'on reconnaîtra, comme plus haut, que l'on doit avoir

$$(3) \qquad N > 0.$$

Ainsi, en général, trois conditions,

$$A > 0, \quad G > 0, \quad N > 0,$$

sont nécessaires pour que $f(x, y, z)$ soit un minimum. De plus, ces conditions sont suffisantes; car, si elles sont remplies, l'expression

$$A\left(h + \frac{Dk + El}{A}\right)^2 + G\left(k + \frac{Ml}{G}\right)^2 + Nl^2,$$

c'est-à-dire $d^2 u$, sera positive pour toutes les valeurs réelles de $h$, $k$ et $l$.

186. Si $f(x, y, z)$ est un maximum, il faudra, pour les mêmes raisons, que l'on ait

$$Ah^2 + Bk^2 + \ldots + 2Fl < 0,$$

ou bien

$$-Ah^2 - Bk^2 - \ldots - 2Fl > 0$$

pour toutes les valeurs réelles de $h$, $k$, $l$.

Ainsi on aura les conditions nécessaires et suffisantes, en remplaçant, dans les trois conditions trouvées plus haut, A par $-$A, B par $-$B,..., F par $-$F.

187. S'il arrivait que les coefficients différentiels A, B, C, D, E, F fussent tous nuls, pour les valeurs de $x$, $y$ et $z$, tirées des équations

$$\frac{du}{dx} = 0, \quad \frac{du}{dy} = 0, \quad \frac{du}{dz} = 0,$$

on verrait facilement que tous les coefficients différentiels du troisième ordre devraient s'annuler d'eux-mêmes. Mais nous n'irons pas plus loin, parce que les conditions qui, dans le cas du maximum ou du minimum de $f(x, y, z)$, doivent alors être remplies par les coefficients différentiels du quatrième ordre, deviennent beaucoup trop compliquées.

### MAXIMUMS ET MINIMUMS DES FONCTIONS IMPLICITES DE PLUSIEURS VARIABLES INDÉPENDANTES.

188. Supposons que l'on ait les équations

$$(1) \quad \begin{cases} f(x, y, z, u, v) = 0, \\ \varphi(x, y, z, u, v) = 0, \\ \psi(x, y, z, u, v) = 0. \end{cases}$$

On peut considérer deux quelconques des variables, par exemple $x$ et $y$, comme indépendantes. Alors $z$, $u$, $v$ seront des fonctions de $x$ et de $y$ déterminées par ces équations. Si l'on veut, par exemple, chercher les maximums et les minimums de la fonction $v$, on aura, d'après

la règle donnée précédemment, les valeurs correspondantes de $x$ et $y$ en résolvant les deux équations

$$\frac{dv}{dx}=0, \quad \frac{dv}{dy}=0.$$

Par suite, on doit avoir

$$\frac{dv}{dx}dx+\frac{dv}{dy}dy=0,$$

c'est-à-dire que la différentielle totale de $v$ doit être nulle.

Si l'on différentie les équations (1) en faisant attention que $dv=0$, il viendra

$$(2) \quad \left\{\begin{aligned} &\frac{df}{dx}dx+\frac{df}{dy}dy+\frac{df}{dz}dz+\frac{df}{du}du=0,\\ &\frac{d\varphi}{dx}dx+\frac{d\varphi}{dy}dy+\frac{d\varphi}{dz}dz+\frac{d\varphi}{du}du=0,\\ &\frac{d\psi}{dx}dx+\frac{d\psi}{dy}dy+\frac{d\psi}{dz}dz+\frac{d\psi}{du}du=0.\end{aligned}\right.$$

Dans ces équations, $dx$, $dy$ sont des constantes, et $dz$, $du$ sont les différentielles totales de $u$ et $z$ considérées comme fonctions de $x$ et de $y$.

On tirera les valeurs de $dz$ et $du$, de deux de ces équations, et, les portant dans la troisième, on obtiendra une équation de la forme

$$P\,dx+Q\,dy=0.$$

Cette équation doit être vérifiée, dans le cas du maximum et du minimum par les valeurs correspondantes des variables $x$ et $y$. Par suite, puisque $dx$ et $dy$ n'ont aucune dépendance entre elles, il faudra que l'on ait

$$P=0, \quad Q=0,$$

équations qui, jointes aux équations (1), donneront les valeurs cherchées de $x, y, z, u, v$.

Pour savoir si la valeur correspondante de la fonction

est maximum ou minimum, il restera à examiner si la différentielle totale $d^2 v$ garde toujours le même signe.

189. Ce qu'on vient de dire renferme comme cas particulier la détermination des maximums et des minimums de fonctions de variables indépendantes liées entre elles par un certain nombre d'équations.

Ainsi, supposons qu'il s'agisse d'une fonction

$$v = F(x, y, z, u)$$

et que l'on ait en outre les relations

$$\varphi(x, y, z, u) = 0,$$
$$\psi(x, y, z, u) = 0.$$

On voit que cela revient à changer, dans la question précédente, $f(x, y, z, u, v)$ en $F(x, y, z, u) - v$, et à supposer que les fonctions $\varphi$ de $\psi$ sont indépendantes de $v$.

NOTIONS SUR LA MÉTHODE INFINITÉSIMALE.

190. Avant d'aborder les applications géométriques du calcul différentiel, nous allons démontrer quelques théorèmes sur les infiniment petits.

Comme nous l'avons déjà dit, une quantité infiniment petite ou un infiniment petit est une quantité variable qui tend vers o.

Pour que le rapport de deux quantités infiniment petites tende vers une limite quand elles approchent simultanément de zéro, il est nécessaire que ces quantités dépendent l'une de l'autre. La recherche de cette limite est facilitée par les théorèmes snivants :

191. THÉORÈME I. *La limite du rapport de deux quantités infiniment petites n'est pas changée, quand on remplace ces quantités par d'autres qui ne leur sont pas égales, mais qui ont avec elles des rapports tendant vers l'unité.*

Soient en effet $\alpha$ et $\beta$ deux quantités infiniment petites, $\alpha'$ et $\beta'$ d'autres quantités telles, que les limites des rapports $\frac{\alpha}{\alpha'}$, $\frac{\beta}{\beta'}$ soient égales à l'unité; on aura

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\alpha'} \cdot \frac{\alpha'}{\beta},$$

de sorte que la limite de $\frac{\alpha}{\beta}$ est égale à la limite de $\frac{\alpha'}{\beta}$.

De même $$\frac{\alpha'}{\beta} = \frac{\alpha'}{\beta'} \cdot \frac{\beta'}{\beta},$$

de sorte que la limite de $\frac{\alpha'}{\beta}$ est égale à la limite de $\frac{\alpha'}{\beta'}$.

Donc les rapports

$$\frac{\alpha}{\beta},\ \frac{\alpha'}{\beta},\ \frac{\alpha'}{\beta'}$$

tendent vers la même limite.

192. On peut encore présenter la démonstration de ce théorème comme il suit:

Puisque $\frac{\alpha'}{\alpha}$ a pour limite l'unité, si l'on pose

$$\alpha' = \alpha + \delta,$$

on aura $$\frac{\alpha'}{\alpha} = 1 + \frac{\delta}{\alpha}$$

et $\frac{\delta}{\alpha}$ devra tendre vers zéro, ce que l'on exprime en disant que $\delta$ est une quantité infiniment petite par rapport à $\alpha$.

On aura de même $$\frac{\beta'}{\beta} = 1 + \frac{\delta'}{\beta},$$

par suite, $$\frac{\alpha'}{\beta'} \cdot \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1 + \frac{\delta}{\alpha}}{1 + \frac{\delta'}{\alpha'}}.$$

Donc, puisque $\frac{\delta}{\alpha}$ et $\frac{\delta'}{\alpha'}$ ont pour limite o, on aura

$$\lim \frac{\alpha'}{\beta'} \times \lim \frac{\beta}{\alpha} = 1,$$

ou

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha'}{\beta'}.$$

Ce nouveau point de vue donne lieu à cet autre énoncé :

*La limite du rapport de deux infiniment petits ne change pas quand on les remplace par d'autres qui en diffèrent d'une quantité infiniment petite par rapport à eux.*

Exemples. 1°. On sait que $x$ devenant infiniment petit, $\frac{x}{\sin x}$ tend vers l'unité. Si donc on avait à trouver la limite du rapport $\frac{\tang x}{x}$, on pourrait lui substituer, en vertu de notre théorème, le rapport $\frac{\sin x}{\tang x} = \frac{\cos x}{1}$ dont la limite est aussi l'unité.

2°. $$\lim \frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \lim \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3},$$

3°. $$\lim \frac{\sin x}{\sin^2 3x} = \lim \frac{x}{9x^2} = \infty.$$

193. *Si une somme d'infiniment petits, dont le nombre augmente indéfiniment, a une limite finie, en les multipliant respectivement par d'autres infiniment petits, la somme des produits sera infiniment petite, ou aura pour limite* o.

En effet, soit une somme d'infiniment petits $h$, $h'$, etc., et posons

$$h + h' + h'' + \ldots = C;$$

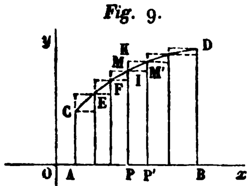
soient $\alpha$, $\alpha'$, $\alpha''$,..., d'autres infiniment petits, et $\varepsilon$ le plus grand d'entre eux en valeur absolue : on aura

$$\alpha h + \alpha' h' + \alpha'' h'' + \ldots < \varepsilon C.$$

Or $\varepsilon$ tendant vers o et C vers une limite finie, on voit bien que $\alpha h + \alpha' h' + \ldots$, doit tendre vers o.

Par exemple, considérons l'aire comprise entre la courbe plane CD, l'axe des $x$ et les deux ordonnées CA et DB. Imaginons que l'on partage AB en parties de plus en plus petites, telles que PP′, suivant une loi quelconque, mais de manière toutefois que chacune de ces parties tende vers o. Je dis que la somme des rectangles tels que MIM′K, construits avec la différence de deux ordonnées consécutives et l'intervalle PP′, a pour limite zéro.

*Fig.* 9.




On a, en effet, $$\sum \mathrm{PP}' = \mathrm{AB}$$

et $$\sum \mathrm{MIM'K} = \sum \mathrm{PP}' . \mathrm{KI} ;$$

et, comme KI est une quantité infiniment petite, on aura, en appliquant le théoréme précédent,

$$\sum \mathrm{MIM'K} = 0.$$

**194.** Quand on considère des infiniment petits qui dépendent les uns des autres, on en prend un en particulier qu'on nomme infiniment petit principal et auquel on rapporte les autres comme à un terme de comparaison. On appelle alors *infiniment petits du premier ordre* tous ceux dont les rapports à celui-là ont des limites finies ; infiniment petits du second ordre, ceux dont les rapports aux infiniment petits du premier ordre sont des infiniment petits du premier ordre ; et ainsi de suite.

D'après cela, si $\alpha$ est un infiniment petit du premier ordre, tout autre infiniment petit de cet ordre sera de la forme $\alpha(p+\beta)$, $p$ étant fini et $\beta$ infiniment petit. Et, en général, $\alpha^n(p+\beta)$ représentera un infiniment petit de l'ordre $n$.

Exemples. 1°. $x$ étant un infiniment petit du premier

ordre, $\sin x$ sera du premier ordre puisque $\frac{x}{\sin x}$ a pour limite 1; $1 - \cos x$ sera du second ordre puisque $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{1}{2} x$, etc.

2°. Si l'accroissement $h$ d'une variable $x$ est du premier ordre, l'accroissement $k$ d'une fonction de cette variable sera en général du premier ordre; mais cet accroissement sera du $n^{ième}$ ordre si $f'(x), f''(x), \ldots, f^{n-1}(x)$ sont nulles, puisqu'on a, dans ce cas,

$$k = \frac{h^n}{1.2.3\ldots n} [f^n(x) + hf^{n-1}(x) + \ldots].$$

Le théorème démontré plus haut (nos 191 et 192) peut encore s'énoncer ainsi : *Quand on cherche la limite du rapport de deux quantités composées d'infiniment petits de divers ordres, on peut ne conserver, dans chacune de ces quantités, que les infiniment petits du plus petit ordre.* Ainsi

$$\lim \frac{\sin x + 3 \sin^2 x}{x + 2x^3} = \lim \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Dans cet exemple, on néglige, au numérateur, $3 \sin^2 x$, infiniment petit du second ordre, vis-à-vis de $\sin x$, qui n'est que du premier; et au dénominateur, on néglige l'infiniment petit du troisième ordre $2x^3$ vis-à-vis de $x$, qui est du premier ordre.

---

# SEIZIÈME LEÇON.

## APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DU CALCUL DIFFERENTIEL.

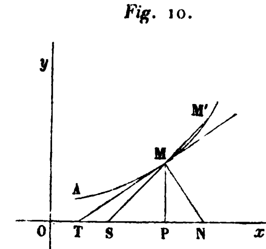
**Équations de la tangente et de la normale. — Longueurs des lignes appelées sous-tangentes, sous-normales, etc. — Degré de l'équation de la tangente. — Problèmes sur les tangentes. — Sens de la concavité et de la convexité des courbes.**

### ÉQUATIONS DE LA TANGENTE ET DE LA NORMALE.

**195.** Soit $f(x, y) = 0$ l'équation d'une courbe plane AMM', soient $x$ et $y$ les coordonnées d'un point quelconque M de cette courbe. Si MT est la tangente au point M, on a, en supposant les axes rectangulaires,

$$\text{tang MTX} = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} :$$

*Fig.* 10.




par conséquent, en désignant par X et Y les coordonnées courantes d'un point quelconque de la tangente, l'équation de cette droite est

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x).$$

Si l'on remplace $\frac{dy}{dx}$ par sa valeur tirée de l'équation de la courbe, l'équation de la tangente deviendra

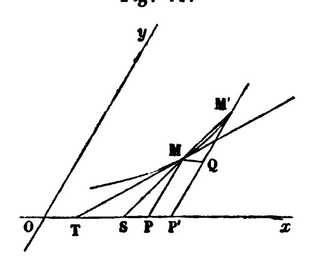
$$Y - y = -\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}}(X - x),$$

ou

$$(1) \qquad \frac{df}{dx}(X - x) + \frac{df}{dy}(Y - y) = 0.$$

**196.** L'équation de la tangente conserve la même forme lorsque les axes sont obliques. En effet, si $x$ et $y$ sont les coordonnées du point de contact M, d'une tangente MT à la courbe AMM', l'équation de cette tangente sera de la forme

*Fig.* 11.




$$Y - y = a(X - x).$$

Or la sécante M'MS a pour équation

$$Y - y = a'(X - x),$$

et $a$ est la limite de $a'$, lorsque le point M' se confond avec M.

Menons MP et M'P' parallèles à OY, et MQ parallèle à OX ; on aura

$$\frac{M'Q}{MQ} = a'.$$

Mais

$$M'Q = \Delta y \quad \text{et} \quad MQ = \Delta x;$$

donc

$$a' = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

De là il suit que

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{ou} \quad a = \frac{dy}{dx}.$$

Donc

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x),$$

est dans tous les cas l'équation de la tangente au point $(x, y)$.

**197.** Il suit de là que, si les axes sont rectangulaires,

l'équation de la *normale* MN sera

$$Y - y = -\frac{dx}{dy}(X - x).$$

Si les axes sont obliques et font un angle $\theta$, l'équation de cette droite sera

$$Y - y = -\frac{dx + dy\cos\theta}{dy + dx\cos\theta}(X - x).$$

LONGUEUR DES LIGNES NOMMÉES SOUS-TANGENTES, ETC.

198. Attachons-nous maintenant, en particulier, au cas où les axes sont rectangulaires.

Si l'on veut avoir la *sous-tangente* $S_t = PT$, on aura

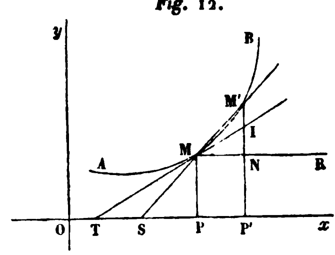


*Fig.* 12.

$$PT = MP \operatorname{tang} TMP = y\frac{dx}{dy};$$

donc

$$S_t = \frac{ydx}{dy}.$$

On peut trouver directement la valeur de la sous-tangente en la regardant comme la limite de la sous-sécante, c'est-à-dire de la droite SP. Or

$$SP = MP \operatorname{tang} SMP = y\frac{\Delta x}{\Delta y},$$

et cette expression a bien pour limite $y\dfrac{dx}{dy}$.

Le triangle MPN (*fig.* 10) donne pour la *sous-normale*

$$S_n = \frac{ydy}{dx}.$$

Pour la longueur MT de la tangente, on aura

$$MT = y\sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}}.$$

Enfin, pour la longueur MN de la normale, on a

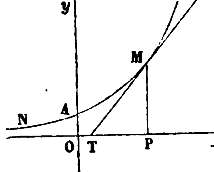
$$MN = y\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}.$$

Exemple.

$$y = a^x.$$

Supposons, pour fixer les idées, $a > 1$. Cette courbe, nommée logarithmique, s'étend à l'infini des deux côtés de l'axe des $y$, et elle est asymptote à l'axe $Ox$ du côté des $x$ négatifs. On tire de l'équation $y = a^x$,

*Fig.* 13.




$$\frac{dy}{dx} = a^x \,\mathrm{l}\, a,$$

$\mathrm{l}\, a$ étant le logarithme népérien de $a$; par conséquent,

$$Y - y = a^x \,\mathrm{l}\, a\,(X - x)$$

est l'équation de la tangente.

Cette tangente peut être construite bien simplement à l'aide de la sous-tangente TP; on a, en effet,

$$TP = y\frac{dx}{dy} = a^x\frac{dx}{dy} = a^x \times \frac{1}{a^x\,\mathrm{l}a},$$

ou

$$TP = \frac{1}{\mathrm{l}a} = \log e.$$

Ainsi *la sous-tangente est constante et égale au logarithme de* e *pris dans le système dont la base est* a, *ou au module de ce système*. Pour la logarithmique $y = e^x$, la valeur constante de la sous-tangente est l'unité.

## DEGRÉ DE L'ÉQUATION DE LA TANGENTE.

199. L'équation de la tangente au point $(x, y)$ peut être mise sous la forme

$$\frac{df}{dx}X + \frac{df}{dy}Y = \frac{df}{dx}x + \frac{df}{dy}y.$$

Si l'équation de la courbe est algébrique et du degré

$m$, il semble au premier abord que $\frac{df}{dx}x + \frac{df}{dy}y$ sera une fonction du $m^{ième}$ degré des coordonnées du point de contact. Mais on peut faire voir que ce degré s'abaisse au moins d'une unité quand on tient compte de l'équation $f(x,y) = 0$.

En effet, soit

$$f(x,y) = u + u_1 + u_2 + \ldots,$$

$u$ étant l'ensemble des termes du degré $m$, $u_1$ l'ensemble de ceux du degré $m-1$, et ainsi de suite. On aura

$$\frac{df}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + \ldots,$$

$$\frac{df}{dy} = \frac{du}{dy} + \frac{du_1}{dy} + \frac{du_2}{dy} + \ldots;$$

d'où
$$\frac{df}{dx}x + \frac{df}{dy}y = x\frac{du}{dx} + y\frac{du}{dy}$$
$$+ \left(x\frac{du_1}{dx} + y\frac{du_1}{dy}\right) + \left(x\frac{du_2}{dx} + y\frac{du_2}{dy}\right) + \ldots,$$

ce qui, d'après un théorème (n° 169) sur les fonctions homogènes, donne

$$\frac{df}{dx}x + \frac{df}{dy}y = mu + (m-1)u_1 + (m-2)u_2 + \ldots$$
$$= -u_1 - 2u_2 - 3u_3 - \ldots,$$

puisque, le point $(x,y)$ étant sur la courbe, on a

$$m(u + u_1 + u_2 + \ldots) = 0.$$

Par conséquent, l'équation de la tangente devient

$$\frac{df}{dx}X + \frac{df}{dy}Y + u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \ldots = 0,$$

et ne contient plus de termes du $m^{ième}$ degré. Ce qu'il s'agissait de démontrer.

Exemple.

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0,$$

on a $$\frac{dy}{dx} = -\frac{By + 2Cx + E}{2Ay + Bx + D}.$$

Il vient donc, pour l'équation de la tangente,

$$(2Ay + Bx + D)(Y - y) + (By + 2Cx + E)(X - x) = 0,$$

ou $$(2Ay + Bx + D)Y + (By + 2Cx + E)X$$
$$= (2Ay + Bx + D)y + (By + 2Cx + E)x.$$

Simplifiant au moyen de l'équation de la courbe, on a finalement

$$(2Ay + Bx + D)Y + (By + 2Cx + E)X + Dy + Ex + 2F = 0,$$

pour l'équation de la tangente au point $(x, y)$.

### PROBLÈMES SUR LES TANGENTES.

**200.** Une courbe étant donnée, si l'on veut mener par un point $(a, b)$ une tangente, on aura pour déterminer les coordonnées inconnues $x$ et $y$ du point de contact, d'abord l'équation de la courbe

(1) $$f(x, y) = 0,$$

et ensuite l'équation

(2) $$a\frac{df}{dx} + b\frac{df}{dy} = \frac{df}{dx}x + \frac{df}{dy}y,$$

obtenue en mettant $a$ et $b$ à la place de X et de Y dans l'équation de la tangente.

Les valeurs de $x$ et de $y$ tirées des équations (1) et (2) détermineront les coordonnées du point de contact. Si $f(x, y)$ est une fonction rationnelle et entière du degré $m$, l'équation (2) sera au plus du degré $(m - 1)$; par suite, le problème proposé aura au plus $m(m - 1)$ solutions. Si $m = 2$, il y a au plus deux tangentes; il y en a au plus six, si $m = 3$; et ainsi de suite.

L'équation (2) considérée isolément représente un lieu géométrique qui contient tous les points de contact et qui est du degré $(m - 1)$ au plus.

**201.** On peut encore se proposer de trouver une tan-

gente parallèle à une droite dont l'équation est $Y = aX$. L'équation de la tangente cherchée étant

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x),$$

on doit avoir $$\frac{dy}{dx} = a;$$

équation qui, jointe à $f(x, y) = 0$, déterminera les coordonnées du point de contact.

Comme l'équation $\frac{dy}{dx} = a$ revient à

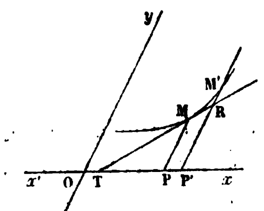
$$-\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}} = a, \quad \text{ou à} \quad \frac{df}{dx} + a\frac{df}{dy} = 0,$$

cette dernière équation étant du degré $(m - 1)$ au plus, si $f(x, y)$ est du degré $m$, le problème admettra au plus $m(m - 1)$ solutions.

## DE LA CONCAVITÉ ET DE LA CONVEXITÉ DES COURBES PLANES.

202 Nous allons maintenant comparer les ordonnées d'une courbe à celles de sa tangente, pour une même abscisse, dans les environs du point de contact. Soit MT une tangente à la courbe MM'; soient $x = \text{OP}$, $y = \text{MP}$ les coordonnées du point de contact. En désignant PP' par $h$, on aura

*Fig.* 14.




$$M'P' = y + \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + R.$$

L'équation de la tangente étant

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x),$$

on aura pour le point dont l'abscisse $X = x + h$,

$$Y - y = \frac{dy}{dx} h,$$

et, par suite, l'ordonnée correspondante sera

$$P'R = y + h \frac{dy}{dx},$$

d'où $$M'R = M'P' - P'R = \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + R.$$

On a démontré, à l'occasion de la formule de Taylor, que si $h$ est assez petit et si $\frac{d^2y}{dx^2}$ est différent de o, la valeur absolue de $\frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{1.2}$ surpasse celle de R; par conséquent, dans ce cas, le signe de $M'P' - P'R$, pour un point M' de la courbe, suffisamment rapproché, soit d'un côté, soit de l'autre de M, sera le même que celui de $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Donc, si l'on a

$$(1) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} > 0,$$

les ordonnées de la courbe sont plus grandes que celles de la tangente dans les environs du point M, de part et d'autre de ce point.

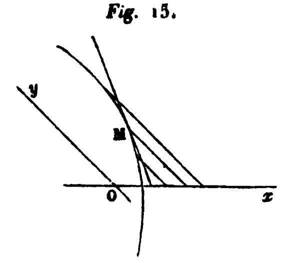
Si, au contraire, on a

$$(2) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} < 0,$$

les ordonnées de la tangente surpassent celles de la courbe.

Dans le premier cas que représente la *fig.* 14, la courbe, aux environs du point M, est dans l'angle obtus MT$x'$ que forme la tangente MT avec l'axe des abscisses; on dit alors que la courbe tourne, au point M, sa convexité vers l'axe des abscisses, ou qu'elle est convexe vers cet

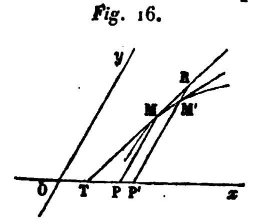
*Fig.* 15.



axe. Cette circonstance est donc indiquée par l'inégalité (1), du moins tant que l'angle des axes ne surpasse pas 90 degrés; car si cet angle était obtus et plus grand que l'angle que la tangente fait avec l'axe des $x$, comme on le voit dans la *fig.* 15, les ordonnées de la courbe seraient encore, pour $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$, plus grandes que celles de la tangente de part et d'autre du point M, et cependant on ne dirait pas, dans ce cas, que la courbe est convexe vers l'axe des $x$.

Dans le second cas, que représente la *fig.* 16, la courbe est, de part et d'autre du point M, dans l'angle aigu formé par la tangente MT avec l'axe O$x$. On dit alors que la courbe, au point M, est concave vers l'axe des abscisses, ou qu'elle tourne sa concavité vers cet axe: mais l'inégalité (2) n'indiquera sûrement cette circonstance que si l'angle des axes est moindre que 90 degrés.

*Fig.* 16.



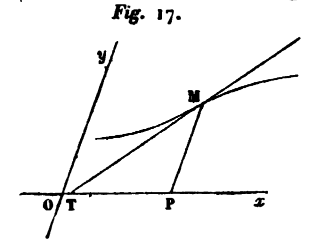

Ce qu'on vient de dire suppose que l'ordonnée du point M est positive. Si ce point est au-dessous de l'axe des abscisses, on voit aisément que la courbe est convexe ou concave vers l'axe des abscisses suivant que l'on a $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ ou $> 0$.

En résumé, selon que $y$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$ sont de même signe ou de signes contraires, la courbe est convexe ou concave au point M vers l'axe des abscisses, si l'angle des parties positives des axes n'est pas plus grand qu'un angle droit. Dans le cas où cet angle est obtus, on changera le signe de l'une des coordonnées, ce qui rendra aigu l'angle des coordonnées positives, et l'on appliquera la même règle.

203. Nous avons supposé, jusqu'à présent, que $\frac{d^2y}{dx^2}$

conservait le même signe pour des points situés de part et d'autre du point M; mais il peut arriver que $\frac{d^2y}{dx^2}$ ait le même signe que $y$ un peu avant que $x$ ne devienne égale à OP, et un signe contraire après que $x$ a dépassé cette valeur, ou *vice versâ*. Alors la courbe, convexe ou concave à gauche du point M, devient concave ou convexe vers l'axe des abscisses à droite de ce point. On dit alors que la courbe a une *inflexion* au point M, qui est dit un *point d'inflexion*. Ces points remarquables s'obtiennent donc en cherchant les valeurs de $x$ et de $y$, qui rendant $\frac{d^2y}{dx^2}$ nulle ou infinie, lui font en même temps changer de signe.

*Fig.* 17.



# DIX-SEPTIÈME LEÇON.

**Différentielle de l'aire d'une courbe plane. — Des aires considérées comme limites d'une somme de parallélogrammes. — Applications. — Rectification d'un arc de courbe plane. — Différentielle d'un arc de courbe. — Limite du rapport de l'arc à sa corde. — Nouveaux théorèmes sur les arcs de courbe considérés comme limites.**

---

## DIFFÉRENTIELLE DE L'AIRE D'UNE COURBE PLANE.

**204.** La surface comprise entre une courbe plane CM, une ordonnée fixe CA, une ordonnée quelconque MP et l'axe des abscisses $Ox$, est une fonction de l'abscisse $OP = x$ du point M, puisqu'elle varie quand on change le point P. Proposons-nous d'en chercher la différentielle. Soit $CAMP = u$. Nommons $\Delta u$ la surface MM′PP′, répondant à un accroissement très-petit $PP' = \Delta x$ de l'abscisse. Si l'on mène les droites MI et M′K parallèles à $Ox$ et terminées aux ordonnées MP et M′P′, comme l'on peut toujours prendre le point M′ assez rapproché du point M pour que les ordonnées soient constamment croissantes ou décroissantes de M en M′ (et ici, pour fixer les idées, nous les avons supposées croissantes), on aura

*Fig.* 18.

$$PMM'P' > PMIP' \quad \text{et} \quad PMM'P' < PKM'P',$$

c'est-à-dire, $\Delta u > y\,\Delta x$ et $\Delta u < (y + \Delta y)\,\Delta x$,

ou
$$y < \frac{\Delta u}{\Delta x} < y + \Delta y.$$

De là, en passant à la limite,

$$\frac{du}{dx} = y, \quad \text{ou} \quad du = y\,dx.$$

205. Quoiqu'on puisse parfaitement admettre qu'en prenant le point M′ assez voisin du point M, les ordonnées seront toujours constamment croissantes ou décroissantes de M en M′, cette hypothèse n'est pas nécessaire à la démonstration. Il suffit pour s'en convaincre de reprendre les raisonnements en remplaçant partout $y$ et $y + \Delta y$ par $y_1$ et $y_2$, $y_1$ étant la plus petite et $y_2$ la plus grande des ordonnées, dans l'intervalle où l'on fait varier l'abscisse.

206. Le même mode de démonstration convient au cas des axes obliques, avec cette seule différence que l'accroissement $\Delta u$ est alors compris entre les aires de deux parallélogrammes dont les côtés sont parallèles aux axes, et comme l'aire d'un parallélogramme est égale au produit de deux côtés adjacents multiplié par le sinus de l'angle qu'ils font entre eux, on a, en appelant $\theta$ l'angle des axes,

$$du = y\,dx \sin\theta.$$

## DES AIRES CONSIDÉRÉES COMME LIMITES D'UNE SOMME DE PARALLÉLOGRAMMES.

207. Dans le cas des axes rectangulaires, la surface ABDC est toujours la limite d'une somme de rectangles intérieurs, formés de la manière suivante. Par des points E, F,..., M, M′, etc., pris sur la courbe, on mène des parallèles à O$x$ dont chacune soit terminée à l'ordonnée du point suivant (l'un de ces rectangles serait, par exemple, MIP′P), et l'on suppose que ces points se rapprochent indéfiniment les uns des autres, en même temps que leur nombre augmente sans limite.

Fig. 19.

En effet, supposons d'abord que les ordonnées soient constamment croissantes de C en D. Soient $x$ et $y$ les

coordonnées de l'un quelconque des points de la courbe, M par exemple; soient $x+\Delta x$, $y+\Delta y$ les coordonnées du point suivant M'. On aura

$$\text{MIP'P} = y\Delta x;$$

et si l'on désigne par $\Sigma y\,\Delta x$ la somme de tous les termes analogues à $y\Delta x$, c'est-à-dire la somme de tous les rectangles intérieurs de CA à BD, il est évident qu'en posant surf ACDB $= u$, on a

$$u > \Sigma y\,\Delta x.$$

Maintenant, si l'on mène, par chacun des points considérés sur la courbe, des parallèles à $Ox$, terminées aux ordonnées des points précédents, on formera des rectangles extérieurs analogues à

$$\text{PKM'P'} = (y + \Delta x)\Delta x = y\Delta x + \Delta y\,\Delta x;$$

et comme ACDB a une surface plus petite que la somme de ces rectangles, on a

$$u < \Sigma y\,\Delta x + \Sigma\Delta y\,\Delta x;$$

par conséquent, on a

$$u - \Sigma y\,\Delta x < \Sigma\Delta y\,\Delta x.$$

Mais comme, à mesure que le nombre des divisions augmente, $\Delta y$ tend vers o, il résulte d'un principe démontré (193) que $\Sigma\Delta y\Delta x$ tend aussi vers o: donc on a

$$u = \lim \Sigma\, y\,\Delta x.$$

On démontrerait de même que $u$ est la limite de la somme des rectangles extérieurs.

Le raisonnement reste le même lorsque les ordonnées sont constamment décroissantes depuis C jusqu'à D; ce que nous venons de démontrer s'applique donc à une portion de courbe dans laquelle les ordonnées varient d'une manière quelconque, car on pourra toujours partager l'aire totale en parties dans lesquelles les ordonnées

soient assujetties à aller constamment en augmentant ou en diminuant.

APPLICATIONS.

208. 1°. Soit

$$y^2 = 2px$$

l'équation d'une parabole rapportée à son axe et à la tangente au sommet.

Si surf OMP $= u$, on a

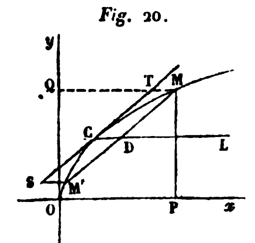
$$du = ydx = \sqrt{2px}.dx = \sqrt{2p}.x^{\frac{1}{2}}dx.$$

Or,

$$x^{\frac{1}{2}}.dx = \frac{2}{3}d.x^{\frac{3}{2}}.$$

Donc
$$du = \frac{2}{3}\sqrt{2p}\, d.x^{\frac{3}{2}} = d\cdot\frac{2}{3}\sqrt{2p}.x^{\frac{3}{2}}.$$

*Fig.* 20.




De là il suit que

$$u = \frac{2}{3}\sqrt{2p}\ x^{\frac{3}{2}} + C;$$

mais, pour $x = 0$, on doit avoir $u = 0$, on a donc $C = 0$, et

$$u = \frac{2}{3}\sqrt{2px} \times x = \frac{2}{3}xy;$$

c'est-à-dire que le segment OMP est les deux tiers du rectangle OPMQ.

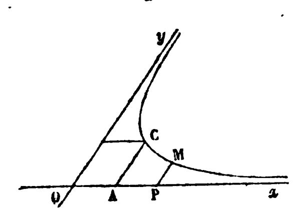
Il est également facile d'évaluer la surface comprise entre un arc MCM' de parabole et sa corde. En effet, si l'on mène la tangente CT parallèle à MM', et, par le point de contact C, le diamètre CDL, on trouvera tout à fait comme ci-dessus, en posant $CD = x$, $MD = y$ et $TCL = \theta$,

$$\text{surf CMD} = \frac{2}{3}xy\sin\theta = \frac{2}{3}\text{CDMT},$$

d'où
$$\text{surf MCM'} = \frac{4}{3}xy\sin\theta = \frac{2}{3}\text{MTSM'}.$$

2°. Soit $xy = m^2$ l'équation d'une hyperbole rapportée à ses asymptotes. Nommons $u$ l'aire du segment ACMP, compris entre la courbe, l'asymptote $Ox$, l'ordonnée fixe $CA = m$, et l'ordonnée variable MP. On aura

Fig. 21.




$$du = y \sin\theta\, dx = m^2 \sin\theta \frac{dx}{x}$$
$$= m^2 \sin\theta\, d.\mathrm{l}x.$$

Donc $u$ et $m^2 \sin\theta.\mathrm{l}x$ ne peuvent différer que par une constante C; par conséquent,

$$u = m^2 \sin\theta\ \mathrm{l}x + C.$$

Pour trouver C, faisons $x = OA = m$; on aura

$$u = 0 \quad \text{ou} \quad 0 = m^2 \sin\theta.\mathrm{l}m + C;$$

donc $$C = -m^2 \sin\theta.\mathrm{l}m,$$

et, par suite, on aura

$$u = m^2 \sin\theta.\mathrm{l}x - m^2 \sin\theta.\mathrm{l}m = m^2 \sin\theta.\mathrm{l}\left(\frac{x}{m}\right).$$

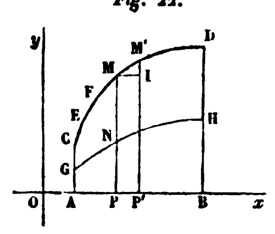
Si l'on avait $m = 1$ et $\theta = 90°$, auquel cas l'hyperbole serait équilatère, on aurait $u = \mathrm{l}x$, c'est-à-dire que *les aires considérées seraient les logarithmes népériens des abscisses correspondantes.*

### DIFFÉRENTIELLE D'UN ARC DE COURBE.

**209.** On ne peut se faire une idée nette et précise de la longueur d'une courbe qu'en nommant ainsi la limite vers laquelle tend le périmètre d'une ligne brisée inscrite dans cette courbe, lorsque ses côtés sont de plus en plus petits, et que leur nombre croît jusqu'à l'infini. Il devient alors nécessaire de démontrer que ce périmètre a réellement une limite déterminée dans tous les cas.

Soit CD un arc de courbe plane, rapportée à deux axes rectangulaires $Ox$ et $Oy$. Inscrivons dans cet arc un contour polygonal CEFMM′D; soient $OP = x$, $MP = y$, les coordonnées de l'un quelconque des sommets M du polygone, et $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, celles du sommet suivant M′ : on a

*Fig. 22.*




$$MM' = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}.$$

Si l'on faisait $\Delta x$ ou $PP' = 0$, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ deviendrait $\frac{dy}{dx}$. On doit donc avoir

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} + \alpha,$$

$\alpha$ étant une quantité qui s'évanouit avec $\Delta x$; par conséquent,

$$MM' = \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} + \alpha\, \Delta x.$$

En remplaçant successivement, dans cette équation, $x$ et $y$ par les coordonnées de tous les sommets du contour polygonal, depuis le point C jusqu'au point D, on aura les longueurs des côtés correspondants. De là résulte, si l'on appelle P le périmètre de cette ligne brisée,

$$P = \sum \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} + \sum \alpha\, \Delta x.$$

Pour avoir la limite de P ou la longueur de l'arc CD, remarquons d'abord que, $\alpha$ étant une quantité infiniment petite et $\sum \Delta x$ ayant une valeur finie qui est AB, il résulte du théorème démontré au n° 193, que

$$\lim \sum \alpha\, \Delta x = 0.$$

Maintenant $\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ est une fonction de $x$, que l'on peut regarder comme la longueur de l'ordonnée NP, d'un point N répondant à la même abscisse $x = OP$. Si l'on fait la même construction pour tous les points de la courbe CD, on aura une courbe GNH, dont l'équation est

$$Y = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2};$$

d'après cela on a

$$\sum \Delta x \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sum Y \Delta x.$$

et, par suite, à cause de $\lim \sum \alpha \Delta x = 0$,

$$P = \lim \sum Y \Delta x.$$

Or $\sum Y \Delta x$ a une limite déterminée qui est l'aire AGNHB. Ainsi le nombre qui exprime la longueur de l'arc CD est le même que celui qui donne l'aire AGNHB.

**210.** Considérons maintenant l'abscisse $OP = x$ comme variable. La longueur de l'arc CM sera alors une fonction de $x$ dont on peut chercher la différentielle.

Soit donc $CM = s$; comme $s =$ aire AGNP, on a

$$ds = Y\,dx = dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

ou enfin

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

**211.** Cette valeur de $ds$ permet d'exprimer très-simplement le sinus et le cosinus de l'angle que la tangente au point M fait avec l'axe des $x$. En effet, si $\alpha$ désigne cet angle, on a $\tang \alpha = \frac{dy}{dx}$. Par conséquent,

$$\sin \alpha = \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{dy}{ds}, \quad \cos \alpha = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{dx}{ds}.$$

LIMITE DU RAPPORT DE L'ARC A SA CORDE. — NOUVEAUX THÉORÈMES SUR LES ARCS CONSIDÉRÉS COMME LIMITES DE POLYGONES.

**212.** *La limite du rapport d'un arc quelconque à sa corde est l'unité.*

En effet, considérons un accroissement quelconque de l'arc CM. Soit $MM' = \Delta s$, on aura

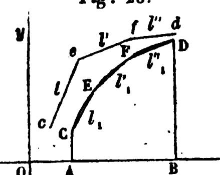
$$\frac{\text{arc } MM'}{MM'} = \frac{\Delta s}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \frac{\frac{\Delta s}{\Delta x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}},$$

et puisque, lorsque $\Delta x$ s'annule, $\frac{\Delta s}{\Delta x}$ devient $\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ ainsi que $\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$, on a

$$\lim \frac{\text{arc } MM'}{MM'} = 1.$$

**213.** Si $cef\ldots d$ est un contour polygonal d'un même nombre de côtés que le contour CEF... D, si, à mesure que les sommets C, E, F,..., etc., se rapprochent de plus en plus, les côtés $ce$, $ef$, etc., tendent aussi de plus en plus à devenir égaux aux côtés correspondants CE, EF, etc., en même temps que le nombre de ces côtés va en augmentant jusqu'à l'infini, le contour polygonal $cef\ldots d$ a une limite qui est la même que celle du contour CEF... D, c'est-à-dire la longueur de l'arc CD.

*Fig.* 23.




En effet, soient $l, l', l''\ldots$ les côtés du contour polygonal $cef\ldots d$, et $l_1, l'_1, l''_1, \ldots$, les côtés correspondants du contour CEF... D. Appelons L la longueur de $cef\ldots d$ et $L_1$ celle de CEF... D. Soient $\frac{l^{(p)}}{l_1^{(p)}}$ le plus petit et $\frac{l^{(g)}}{l_1^{(g)}}$ le plus grand des rapports des côtés correspondants des deux

contours polygonaux. On sait que la valeur du rapport

$$\frac{l + l' + l'' + \text{ etc.}\ldots}{l_1 + l'_1 + l''_1 + \text{ etc.}\ldots}$$

est toujours comprise entre $\frac{l\,(p)}{l_1\,(p)}$ et $\frac{l\,(g)}{l_1\,(g)}$, c'est-à-dire que l'on a

$$\frac{l\,(p)}{l_1\,(p)} < \frac{L}{L_1} < \frac{l\,(g)}{l_1\,(g)}.$$

Or, $\lim \frac{l\,(p)}{l_1\,(p)} = 1$ et $\lim \frac{l\,(g)}{l_1\,(g)} = 1$.

Donc $\lim \frac{L}{L_1} = 1$, ou $\lim L = \lim L_1$.

**214.** Voici encore un théorème du même genre, et que l'on démontrerait d'une manière analogue : Si l'on mène entre les deux ordonnées extrêmes CA, DB un nombre indéfini de parallèles à l'axe des $y$, puis que l'on inscrive entre ces parallèles d'autres lignes droites, tangentes à la courbe, la somme de ces dernières tend vers une limite qui est encore la longueur de la courbe donnée, même quand elles ne forment pas une ligne brisée continue.

---

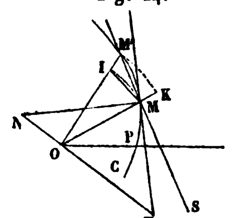
# DIX-HUITIÈME LEÇON.

*Des courbes planes rapportées à des coordonnées polaires.* — Détermination de la tangente. — Longueur des lignes nommées sous-tangentes, sous-normales. — Différentielle de l'aire d'un secteur. — Différentielle d'un arc de courbe. — Applications. — Des coordonnées bipolaires.

## DÉTERMINATION DE LA TANGENTE.

**215.** Soient O le pôle, OL l'axe polaire, et M'MC une courbe, dont l'équation soit $f(r, \theta) = 0$. Pour mener la tangente MT à cette courbe au point M, il suffit de connaître l'angle $\text{OMT} = \mu$. Soient donc $r$ et $\theta$ les coordonnées du point M, et $r + \Delta r$, $\theta + \Delta\theta$ celles du point M'. Décrivons, du point O comme centre, l'arc MI.

*Fig.* 24.




Dans le triangle M' MI on a

$$\frac{\sin \text{IM'M}}{\sin \text{M'MI}} = \frac{\text{MI}}{\text{M'I}} = \frac{\text{MI}}{\text{arc MI}} \times \frac{\text{arc MI}}{\text{M'I}} = \frac{\text{MI}}{\text{arc MI}} \times \frac{r\Delta\theta}{\Delta r}.$$

Si l'on passe à la limite, c'est-à-dire si on suppose que le point M' se rapproche indéfiniment du point M, l'angle IM'M devient OMT ou $\mu$, l'angle M'MI devient $90° - \mu$ et l'on a

$$(1) \qquad \operatorname{tang} \mu = \frac{r\,d\theta}{dr}.$$

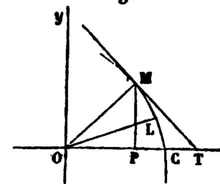
On tire de là

$$\sin \mu = \frac{dr}{\sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}}, \quad \cos \mu = \frac{r\,d\theta}{\sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}}.$$

Comme $\mu$ est compris entre 0° et 180°, il faut que $\sin \mu$ soit positif. Quant à $\cos \mu$, il sera positif ou négatif, suivant que l'angle $\mu$ sera aigu ou obtus.

**216.** On peut encore parvenir à la formule (1) par une transformation de coordonnées. En effet, prenons l'axe polaire $Ox$ pour axe des abscisses, et une perpendiculaire $Oy$ pour axe des ordonnées. Soient $OP = x$ et $MP = y$ les coordonnées correspondantes du point M; on aura

Fig. 25.




$$\text{tang}\,OMT = \text{tang}(MTx - MOT).$$

Mais $\qquad \text{tang}\,MTx = \dfrac{dy}{dx} \quad \text{et} \quad \text{tang}\,MOT = \dfrac{y}{x};$

donc $$\text{tang}\,OMT = \frac{\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x}}{1 + \dfrac{ydy}{xdx}},$$

ou

(2) $$\text{tang}\,OMT = \frac{xdy - ydx}{xdx + ydy}.$$

Or, on a $\qquad x = r\cos\theta \quad \text{et} \quad y = r\sin\theta;$

donc $\qquad dx = dr\cos\theta - rd\theta\sin\theta,$

et $\qquad dy = dr\sin\theta + rd\theta\cos\theta.$

On en tire

$$\text{tang}\,OMT = \frac{r\cos\theta(dr\sin\theta + rd\theta\cos\theta) - r\sin\theta(dr\cos\theta - rd\theta\sin\theta)}{r\cos\theta(dr\cos\theta - rd\theta\sin\theta) + r\sin\theta(dr\sin\theta + rd\theta\cos\theta)},$$

et toutes réductions faites, il viendra

$$\text{tang}\,OMT = \frac{r^2d\theta}{rdr} = \frac{rd\theta}{dr}.$$

## LONGUEUR DES LIGNES NOMMÉES SOUS-TANGENTES, SOUS-NORMALES.

**217.** Dans ce système de coordonnées, la sous-tangente est la perpendiculaire OT (*fig.* 24) menée au rayon vecteur OM par l'origine, et terminée à la tangente MT. La sous-normale ON se mesure sur la même droite, à partir du pôle O, jusqu'à la rencontre de la normale MN en N. D'après ces définitions, $S_t$ et $S_n$ désignant ces deux droites,

on aura

$$S_t = OT = r \operatorname{tang} \mu = \frac{r^2 d\theta}{dr},$$

et $$S_n = ON = \frac{r}{\operatorname{tang} \mu} = \frac{dr}{d\theta}.$$

DIFFÉRENTIELLE D'UN SECTEUR. — D'UN ARC DE COURBE.

**218.** Considérons (*fig.* 24, page 190) un secteur POM, compris entre deux rayons vecteurs OP et OM. Soient $POM = u$ et $MOM' = \Delta u$. On peut prendre l'arc MM' assez petit pour que, de M en M', les rayons vecteurs soient constamment croissants ou décroissants. Pour fixer les idées, supposons-les croissants. Décrivons du point O, comme centre, les arcs de cercle MI, M'K, terminés aux rayons vecteurs $OM = r$ et $OM' = r'$ : on aura

$$OMI < \Delta u < OM'K,$$

ou bien, comme $OMI = \frac{1}{2} r^2 \Delta\theta$ et $OM'K' = \frac{1}{2} r'^2 \Delta\theta$,

on a $$\frac{1}{2} r^2 \Delta\theta < \Delta u < \frac{1}{2} r'^2 \Delta\theta,$$

ou $$\frac{1}{2} r^2 < \frac{\Delta u}{\Delta\theta} < \frac{1}{2} r'^2$$

Or, comme à la limite, $r'$ devient égal à $r$, on a

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{1}{2} r^2, \quad \text{ou} \quad du = \frac{1}{2} r^2 d\theta.$$

**219.** Ce calcul conduit à une conséquence qui est souvent utile. On a trouvé plus haut (n° **216**)

$$\operatorname{tang} OMT = \frac{x\,dy - y\,dx}{x\,dx + y\,dy},$$

et aussi (n° **215**)

$$\operatorname{tang} OMT = \frac{r\,d\theta}{dr};$$

on aura donc $$\frac{x\,dy - y\,dx}{x\,dx + y\,dy} = \frac{r^2\,d\theta}{r\,dr}.$$

Mais, à cause de

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

on a

$$xdx + ydy = rdr;$$

donc

$$xdy - ydx = r^2 d\theta,$$

ou

$$\frac{1}{2}(xdy - ydx) = \frac{1}{2} r^2 d\theta.$$

Or $\frac{1}{2} r^2 d\theta$ est la différentielle du secteur LOM; donc cette différentielle est aussi égale à $\frac{1}{2}(xdy - ydx)$.

On pourrait d'ailleurs obtenir ce résultat de la manière suivante. On a

$$\frac{y}{x} = \tang \theta; \quad \text{d'où} \quad \frac{xdy - ydx}{x^2} = \frac{d\theta}{\cos^2\theta},$$

ou

$$xdy - ydx = \frac{x^2}{\cos^2\theta} d\theta.$$

Or on a

$$x^2 = r^2 \cos^2\theta;$$

donc

$$\frac{1}{2}(xdy - ydx) = \frac{1}{2} r^2 d\theta.$$

220. Considérons l'arc CM $= s$ (*fig.* 24, page 190), et soit MM' $= \Delta s$ un accroissement donné à cet arc.

Dans le triangle M'MI on a

$$\frac{\text{MM}'}{\text{MI}} = \frac{\sin \text{MIM}'}{\sin \text{MM}'\text{I}},$$

d'où, à cause de MI $= r\Delta\theta$,

$$\frac{\text{MM}'}{\text{arc MM}'} = \frac{r\Delta\theta}{\Delta s} \cdot \frac{\sin \text{MIM}'}{\sin \text{MM}'\text{I}},$$

et, en passant à la limite,

$$1 = \frac{rd\theta}{ds} \cdot \frac{1}{\sin\mu},$$

d'où

$$ds = \frac{rd\theta}{\sin\mu},$$

ou

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}.$$

De là résulte (n° 215)

$$\sin\mu = \frac{rd\theta}{ds}, \quad \cos\mu = \frac{dr}{ds}.$$

**221.** On peut encore arriver à la différentielle de l'arc par une transformation de coordonnées; en effet, on a

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$= \sqrt{(dr\cos\theta - rd\theta\sin\theta)^2 + (dr\sin\theta + rd\theta\cos\theta)^2},$$

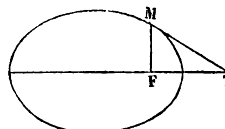
ou

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}.$$

APPLICATIONS.

**222.** 1°. L'équation d'une ellipse, quand on prend pour pôle le foyer de droite F et le grand axe pour axe polaire, est

*Fig.* 26.




$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}.$$

De là on tire

$$dr = \frac{ep\sin\theta\, d\theta}{(1 + e\cos\theta)^2},$$

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{(1 + e\cos\theta)^2}{ep\sin\theta};$$

d'où

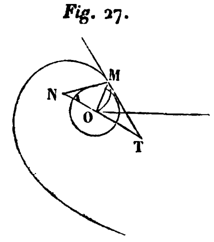
$$\frac{rd\theta}{dr} = \text{tang FMT} = \frac{1 + e\cos\theta}{e\sin\theta}.$$

2°. *La spirale d'Archimède,*

$$r = a\theta.$$

La courbe part du pôle et est tangente en ce point à l'axe polaire. Pour la construire, on décrit un cercle du pôle comme centre avec l'unité pour rayon. L'arc de ce cercle compris entre un rayon vecteur et l'axe polaire, a pour longueur $\theta$, et en portant cette longueur, multipliée par $a$, sur le rayon vecteur à partir du centre, on aura un point de la courbe.

*Fig.* 27.



Comme $r$ croît indéfiniment avec $\theta$, la courbe fera une infinité de révolutions autour du pôle.

On aura $dr = ad\theta$, d'où

$$\text{tang}\,\mu = \frac{rd\theta}{ad\theta} = \frac{r}{a} = \theta,$$

$$S_t = \frac{r^2 d\theta}{dr} = a\theta^2,$$

$$S_n = \text{ON} = \frac{dr}{d\theta} = a.$$

Ainsi la sous-normale est constante, ce qui offre un moyen très-simple de construire la tangente.

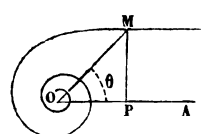
3°. La *spirale hyperbolique*, ainsi nommée parce que son équation

$$r\theta = a$$

est analogue à celle de l'hyperbole $xy = m^2$.

De l'équation de la courbe on tire $r = \frac{a}{\theta}$ : pour $\theta = 0$, on a $r = \infty$ ; pour des valeurs très-petites de $\theta$, $r$ est fort grand, et diminue à mesure que $\theta$ augmente; pour $\theta = \infty$, on a $r = 0$. Par conséquent, la courbe fait une infinité de révolutions autour du point O sans jamais pouvoir l'atteindre; ce point est un point asymptote. La courbe a une asymptote parallèle à OA; car si, d'un point M pris sur la courbe, on abaisse une perpendiculaire MP sur l'axe polaire, on aura

*Fig.* 28.




$$\text{MP} = \text{OM} \sin\theta = r\sin\theta = a\frac{\sin\theta}{\theta};$$

Donc, lorsque $\theta$ tend vers 0, la distance MP tend vers $a$, puisque $\frac{\sin\theta}{\theta}$ tend vers l'unité.

On aura ensuite

$$\text{tang}\,\mu = \frac{rd\theta}{dr} = -\frac{r\theta^2}{a} = -\theta,$$

$$S_t = \frac{r^2 d\theta}{dr} = -r\theta = -a.$$

La sous-tangente est donc constante, ce qui offre un moyen commode de mener la tangente en un point donné de la courbe.

4°. La *spirale logarithmique*, dont l'équation est

$$r = ab^\theta.$$

En changeant l'axe polaire sans changer le pôle, on peut s'arranger de manière à avoir pour équation

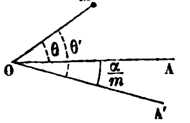
$$r = e^{m\theta}.$$

En effet, posons $a = e^\alpha$, $b = e^m$, alors

$$r = e^\alpha . e^{m\theta} = e^{m\theta + \alpha} = e^{m\left(\theta + \frac{\alpha}{m}\right)}.$$

Soient OA le premier axe polaire, et M un point de la courbe. Prenons un axe polaire OA′, qui fasse avec le premier un angle $AOA' = \frac{\alpha}{m}$. Alors, si $MOA = \theta$, en posant $\theta + \frac{\alpha}{m} = \theta'$, l'équation deviendra

*Fig.* 29.




$$r = e^{m\theta'}.$$

Considérons donc l'équation $r = e^{m\theta}$ : pour $\theta = 0$, on aura $r = a$, et si l'on fait croître $\theta$ indéfiniment, $r$ croîtra indéfiniment. Par conséquent la courbe fera, à partir du point A (*fig.* 30), pour lequel OA = 1, une infinité de révolutions. En donnant à $\theta$ des valeurs négatives, $r$ diminuera indéfiniment; donc, la courbe fera encore à partir

du point A, mais dans l'autre sens, une infinité de révolutions, en s'approchant toujours du pôle.

On aura $dr = me^{m\theta} d\theta = mrd\theta$; par suite, tang $\mu = \frac{1}{m}$,

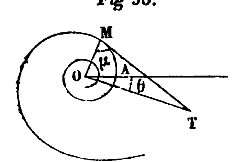


Fig 30.

quantité constante. Donc, *dans la spirale logarithmique, la tangente fait un angle constant avec le rayon vecteur qui passe par le point de contact.*

La sous-tangente sera $\frac{r}{m}$, et la sous-normale $mr$.

*L'extrémité* T *de la sous-tangente décrit une spirale égale à la première, mais située différemment.* Soit $OT = \rho$, on a

$$\rho = \frac{r}{m} = \frac{e^{m\theta}}{m}.$$

Or, en posant $TOA = -\theta'$, on aura $\theta = \theta' + \frac{\pi}{2}$.

Par suite,

$$\rho = \frac{e^{m\left(\theta' + \frac{\pi}{2}\right)}}{m} = \frac{e^{m\left(\theta' + \frac{\pi}{2}\right)}}{e^{lm}} = e^{m\left(\theta' + \frac{\pi}{2} - \frac{lm}{m}\right)},$$

et, en prenant un nouvel axe polaire incliné sur le premier d'un angle égal à $\frac{\pi}{2} - \frac{lm}{m}$, puis posant

$$\theta'' = \left(\theta' + \frac{\pi}{2} - \frac{lm}{m}\right),$$

on aura l'équation

$$\rho = e^{m\theta''},$$

qui représente une spirale égale à la première. L'extrémité de la normale décrit aussi une spirale égale à la première.

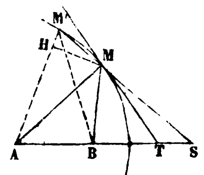
### DES COORDONNÉES BIPOLAIRES.

223. Dans ce système de coordonnées, on détermine

la position d'un point sur un plan, par ses distances $r$ et $r'$ à deux points fixes A et B.

Soit $f(r, r') = 0$ l'équation de la courbe CM, et supposons qu'il s'agisse de lui mener une tangente au point M.

*Fig.* 31.




Considérons, pour cela, la sécante M'MS. Menons MH perpendiculaire à AM'.

Soient

$$\text{AM} = r, \quad \text{BM} = r'; \quad \text{AM}' = r + \Delta r, \quad \text{BM}' = r' + \Delta r';$$

soient, de plus,

$$\text{MAM}' = \Delta\theta, \quad \text{arc MM}' = \Delta s; \quad \text{AMT} = \alpha, \quad \text{BMT} = \text{ϐ}.$$

On aura

$$\cos \text{AM}'\text{M} = \frac{\text{M}'\text{H}}{\text{MM}'} = \frac{\text{M}'\text{H}}{\Delta s} \times \frac{\text{arc MM}'}{\text{MM}'},$$

ou bien

$$\cos \text{AM}'\text{M} = \frac{\Delta r + 2r \sin^2 \frac{1}{2}\Delta\theta}{\Delta s} \times \frac{\text{arc MM}'}{\text{MM}'}.$$

Or $$\frac{2r \sin^2 \frac{1}{2}\Delta\theta}{\Delta s} = 0, \quad \lim \text{AM}'\text{M} = \alpha:$$

donc

$$\cos\alpha = \frac{dr}{ds}.$$

Pour la même raison, $\cos \text{ϐ} = \dfrac{dr'}{ds}$.

Par suite, on a

$$\frac{\cos\alpha}{\cos \text{ϐ}} = \frac{dr}{dr'},$$

ce qui détermine la tangente MT.

**224.** En prenant les deux foyers d'une ellipse pour points fixes, l'équation de cette courbe sera

$$r + r' = 2a.$$

De là on tire $dr + dr' = 0$; d'où $\frac{dr}{dr'} = -1$ : donc

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = -1,$$

ou

$$\cos\alpha = -\cos\beta.$$

On retrouve ainsi ce résultat connu que *les rayons vecteurs, dans l'ellipse, forment avec la tangente, d'un même côté, deux angles supplémentaires.*

On trouverait de même, pour l'hyperbole, $\cos\alpha = \cos\beta$. Pour une courbe dont l'équation serait $r \pm mr' = a$, on aurait $\cos\alpha = \mp m \cos\beta$.

---

# DIX-NEUVIÈME LEÇON.

**Contacts de divers ordres des courbes planes. — L'ordre de ce contact est indépendant du choix des axes. — Caractères distinctifs des contacts d'ordre pair ou d'ordre impair. — Des courbes osculatrices. — Du cercle osculateur. — Application aux sections coniques.**

## CONTACT DE DIVERS ORDRES DES COURBES PLANES.

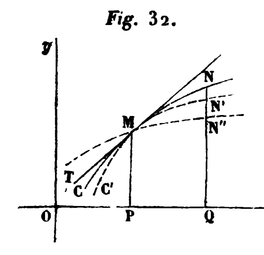
**225.** Soient deux courbes CMN, C′M′N′ ayant pour équations

$$y = f(x), \quad y' = \varphi(x),$$

$y$ et $y'$ étant des fonctions explicites ou implicites de $x$. Supposons que ces deux courbes aient en M un point commun, et comparons les ordonnées QN et QN′ des deux courbes, répondant à une même abscisse, dans le voisinage du point M : soient $\mathrm{OP} = x$ et $\mathrm{PQ} = h$, on a

$$\mathrm{QN} = f(x+h), \quad \mathrm{QN'} = \varphi(x+h).$$

*Fig.* 32.




Donc

$$\mathrm{NN'} = f(x+h) - \varphi(x+h),$$

et l'on aura, d'après la série de Taylor,

$$\mathrm{NN'} = y - y' + h\left(\frac{dy}{dx} - \frac{dy'}{dx}\right) + \frac{h^2}{1.2}\left(\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{d^2y'}{dx^2}\right) + \mathrm{R}.$$

Or, on peut mettre R sous la forme $\frac{\quad}{1.2}\alpha$, $\alpha$ devenant nul avec $h$; et comme M est un point commun aux deux courbes, ce qui donne $y = y'$, on a

$$\mathrm{NN'} = h\left(\frac{dy}{dx} - \frac{dy'}{dx}\right) + \frac{h^2}{1.2}\left(\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{d^2y'}{dx^2} + \alpha\right).$$

Maintenant, si l'on suppose que les deux courbes aient en M une tangente commune MT, on aura en ou-

tre $\frac{dy}{dx}=\frac{dy'}{dx}$, et l'égalité précédente deviendra

$$NN'=\frac{h^2}{1.2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{d^2y'}{dx^2}+\alpha\right).$$

Il est facile de démontrer que la courbe MN' approche plus de la courbe MN, que toute autre courbe MN'' qui, passant par le point M, ne serait pas tangente à MT.

En effet, soit $y''=\psi(x)$ l'équation de MN''; on aura

$$NN''=h\left(\frac{dy}{dx}-\frac{dy''}{dx}+6\right),$$

6 s'annulant avec $h$; donc

$$\frac{NN'}{NN''}=\frac{\frac{h^2}{1.2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{d^2y'}{dx^2}+\alpha\right)}{\frac{dy}{dx}-\frac{dy''}{dx}+6}.$$

Donc, quand $h$ tend vers o, on a

$$\lim\frac{NN'}{NN''}=0.$$

Ce qui montre qu'en se plaçant suffisamment près du point M, NN' est moindre que NN'', et par suite que la courbe MN' est située entre MN et MN''.

226. Généralement, supposons que l'on ait

$$(a)\quad y'=y,\quad \frac{dy'}{dx}=\frac{dy}{dx},\quad \frac{d^2y'}{dx^2}=\frac{d^2y}{dx^2},\ldots,\quad \frac{d^ny'}{dx^n}=\frac{d^ny}{dx^n}.$$

Il en résulte

$$NN'=\frac{h^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}\left(\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}-\frac{d^{n+1}y'}{dx^{n+1}}+\alpha\right),$$

$\alpha$ étant une quantité qui devient nulle en même temps que $h$. Je dis que, dans les environs du point M, la courbe MN' qui remplit les conditions $(a)$ approche plus de MN que toute autre courbe MN'' qui ne les remplirait pas toutes.

En effet, soit $y''=\psi(x)$ l'équation de MN'', et supposons que les $m$ premières dérivées de $y''$ soient égales

aux $m$ premières dérivées de $y$, $m$ étant moindre que $n$. On aura

$$QN - QN'' = NN'' = \frac{h^{m+1}}{1.2\ldots(m+1)}\left(\frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}} - \frac{d^{m+1}y''}{dx^{m+1}} + 6\right),$$

$6$ étant une quantité qui devient nulle en même temps que $h$. Il résulte de là que

$$\frac{NN'}{NN''} = \frac{h^{n-m}}{(m+2)(m+3)\ldots(n+1)} \times \frac{\dfrac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} - \dfrac{d^{n+1}y'}{dx^{n+1}} + \alpha}{\dfrac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}} - \dfrac{d^{m+1}y''}{dx^{m+1}} + 6}.$$

Or, comme $h$ décroît jusqu'à o, $\alpha$ et $6$ tendent de plus en plus vers cette limite; il s'ensuit que, lorsque $h$ est assez petit, le rapport $\frac{NN'}{NN''}$ est sensiblement proportionnel à $h^{n-m}$, et, par conséquent, peut devenir plus petit que toute quantité donnée, puisque $n > m$.

Si l'on convient de dire que *les deux courbes* MN′ *et* MN *ont un contact de l'ordre* n, et par suite que les deux courbes MN et MN″ ont un contact de l'ordre $m$, les résultats auxquels nous venons de parvenir peuvent s'énoncer en disant que, *par un point commun à deux courbes qui ont entre elles un contact de l'ordre* n, *on ne peut faire passer aucune courbe ayant, avec l'une des deux proposées, un contact d'un ordre inférieur au* n*ième*.

### L'ORDRE DU CONTACT EST INDÉPENDANT DU CHOIX DES AXES.

**227.** *L'ordre du contact est indépendant de la direction des axes,* pourvu que l'axe des ordonnées ne soit pas parallèle à la tangente commune aux deux courbes.

On pourrait démontrer ce théorème en employant les formules générales de la transformation des coordonnées, et faisant voir que les dérivées des ordonnées des deux courbes sont encore égales dans le nouveau système d'axes

jusqu'au $n^{ième}$ ordre, si $n$ était l'ordre de contact dans le premier système. Mais on peut y parvenir plus simplement par des considérations géométriques.

Soient CMN, C'M'N', les deux courbes tangentes en M.

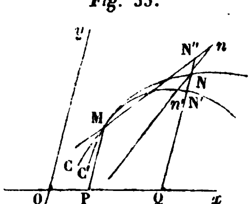



*Fig.* 33.

Par le point M menons une droite quelconque, mais différente de la tangente au point M. Son équation sera

$$y'' = ax + b.$$

Soient

$$y = f(x), \quad y' = \varphi(x),$$

les équations des deux courbes. Considérons les ordonnées de ces trois lignes correspondant à un point N pris sur la première; on aura encore

$$NN' = \frac{h^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)}\left(\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} - \frac{d^{n+1}y'}{dx^{n+1}} + \alpha\right),$$

et puisque, par supposition, la droite menée par le point M est différente de la tangente,

$$NN'' = h\left(\frac{dy}{dx} - \frac{dy''}{dx} + \beta\right) = h\left(\frac{dy}{dx} - a + \beta\right).$$

Par suite,

$$\frac{NN'}{(NN'')^{n+1}} = \frac{\dfrac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} - \dfrac{d^{n+1}y'}{dx^{n+1}} + \alpha}{\left(\dfrac{dy}{dx} - a + \beta\right)} \cdot \frac{1}{1.2.3\ldots(n+1)}.$$

Or, quand $h$ tend vers o, $\alpha$ et $\beta$ tendent aussi vers o. On voit donc que le rapport $\frac{NN'}{(NN'')^{n+1}}$ tendra vers une limite finie.

On peut donc dire que si le contact est du $n^{ième}$ ordre, le rapport $\frac{NN'}{NN''}$ sera un infiniment petit du $n^{ième}$ ordre. La réciproque est d'ailleurs évidente.

228. Supposons maintenant que l'on rapporte la courbe

à d'autres axes; par le point N menons une parallèle au nouvel axe des $y$. Soient $n'$ le point où cette parallèle coupe la courbe $y' = \varphi(x)$ et $n''$ le point où elle coupe la droite $y'' = ax + b$. Pour démontrer que l'ordre de contact ne change pas, il suffit de prouver que le rapport $\frac{\mathrm{N}n'}{(\mathrm{N}n'')^{n+1}}$ tend vers une limite finie. Car alors $\frac{\mathrm{N}n}{\mathrm{N}n'}$ sera un infiniment petit du $n^{ième}$ ordre, et, par suite, le contact sera encore de l'ordre $n$.

Or, si l'on suppose que l'on ait joint N$'n'$, le triangle NN$'n'$ donnera

$$\frac{\mathrm{NN}'}{\mathrm{N}n'} = \frac{\sin n'}{\sin \mathrm{N}'}.$$

Le point N s'approchant indéfiniment de M, le point N$'$ tendra vers N, ainsi que le point $n'$, et, par conséquent, N$'$ et $n'$ se confondront à *la limite*. Donc $n'$N$'$ tendra vers la tangente au point M, et, par suite, le rapport des sinus des angles $n'$ et N$'$ aura une limite finie. D'ailleurs, le rapport $\frac{\mathrm{NN}''}{\mathrm{N}n''}$ reste constant quand le point N s'approche du point M, puisque le triangle variable N$n''$N$''$ reste toujours semblable à lui-même.

On a $\mathrm{NN}' = \mathrm{N}n' \frac{\sin n'}{\sin \mathrm{N}'}$ et $\mathrm{NN}'' = \mathrm{N}n'' \frac{\sin n''}{\sin \mathrm{N}''}$.

De là

$$\frac{\mathrm{NN}'}{(\mathrm{NN}'')^{n+1}} = \frac{\mathrm{N}n'}{(\mathrm{NN}'')^{n+1}} \times \frac{\frac{\sin n'}{\sin \mathrm{N}'}}{\left(\frac{\sin n''}{\sin \mathrm{N}''}\right)^{n+1}},$$

d'où l'on déduit que le rapport $\frac{\mathrm{NN}'}{(\mathrm{NN}'')^{n+1}}$ tend vers une limite finie.

### CARACTÈRES GÉOMÉTRIQUES D'UN CONTACT D'ORDRE PAIR OU D'ORDRE IMPAIR.

229. Si les deux courbes CMN, C$'$M$'$N$'$, qui ont respectivement pour équation $y = f(x)$ et $y' = \varphi(x)$, ont

au point M $(x, y)$ un contact de l'ordre $n$, les $n+1$ conditions suivantes seront remplies :

$$y' = y, \quad \frac{dy'}{dx} = \frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2y'}{dx^2} = \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \quad \frac{d^ny'}{dx^n} = \frac{d^ny}{dx^n}.$$

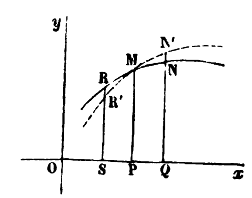
Nous avons vu que, dans ce cas, on a

$$NN' = QN - QN' = \frac{h^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}\left(\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} - \frac{d^{n+1}y'}{dx^{n+1}} + \alpha\right).$$

Mais, jusqu'à présent, nous n'avons fait attention qu'à la valeur absolue de NN' ou de QN — QN'. Nous allons maintenant avoir égard à son signe.

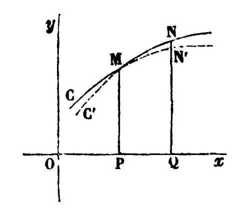
Si $n$ est pair, $n+1$ étant impair, $h^{n+1}$, et par suite QN — QN', change de signe avec $h$, et l'on en conclut qu'une des deux courbes étant au-dessous de l'autre à gauche du point de contact, est au-dessus à droite de ce point, en sorte qu'en ce point les deux courbes se traversent mutuellement, comme on le voit dans la figure.

*Fig.* 34.




Si $n$ est impair, alors $n+1$ étant pair, en prenant $h$ assez petit, le signe de QN — QN' ne changera pas avec celui de $h$, c'est-à-dire qu'aux environs du point M les deux courbes ne se traversent pas.

*Fig.* 35.




De tout ceci on conclut que, *quand deux courbes ont entre elles un contact d'ordre* IMPAIR, *l'une des deux embrasse l'autre*, et que *deux courbes se traversent mutuellement au point de contact, quand elles ont un contact d'ordre* PAIR.

Une ligne droite tangente à une courbe a en général avec elle un contact du premier ordre, c'est-à-dire d'ordre impair ; aussi est-elle, au point de contact, tout entière d'un côté de la courbe. Si le point de contact est un

point d'inflexion, alors le contact devient d'ordre pair, et la tangente traverse la courbe.

### DES COURBES OSCULATRICES.

**230.** Soit

$$(1) \qquad \Phi(x, y', a, b, c, \ldots) = 0,$$

une équation renfermant $n+1$ constantes arbitraires, $a, b, c, \ldots$, et qui, suivant les valeurs attribuées à ces constantes, convient à une infinité de courbes différentes. On peut disposer de l'indétermination de $a, b, c, \ldots$, pour faire en sorte que la courbe (1) ait un contact d'un ordre déterminé, du $n^{ième}$ au plus, en un point donné $(x, y)$ avec une courbe donnée par l'équation

$$(2) \qquad y = f(x).$$

Supposons que l'on veuille avoir un contact du $n^{ième}$ ordre. On devra avoir les $n+1$ conditions suivantes, répondant à l'abscisse $x$ :

$$(a) \quad y' = y, \quad \frac{dy'}{dx} = \frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2y'}{dx^2} = \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \quad \frac{d^ny'}{dx^n} = \frac{d^ny}{dx^n}.$$

On obtiendra $\frac{dy'}{dx}, \frac{d^2y'}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny'}{dx^n}$, en différentiant $n$ fois de suite l'équation (1), et $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}$, en différentiant $n$ fois de suite l'équation $y = f(x)$. Les $n+1$ équations $(a)$ détermineront les $n+1$ constantes inconnues, $a, b, c$, etc., en fonction des coordonnées du point de contact et des coefficients de l'équation (2).

Quand on détermine les constantes $a, b, c$, etc., de manière à obtenir le contact de l'ordre le plus élevé possible, qui est égal au nombre des constantes moins 1, on dit que parmi toutes les courbes de même espèce représentées par l'équation (1), celle qui répond à ces valeurs des constantes est *osculatrice* à la courbe $y = f(x)$.

**231**. Comme première application, considérons la droite

$$(1) \qquad y' = ax + b,$$

et la courbe $y = f(x)$.

L'équation de la droite ne renfermant que deux constantes arbitraires, on ne pourra établir qu'un contact du premier ordre. Il faudra pour cela satisfaire aux deux équations

$$y' = y \quad \text{et} \quad \frac{dy'}{dx} \quad \text{ou} \quad a = \frac{dy}{dx}.$$

Si l'on remplace $y'$ par $y$ dans l'équation (1), on aura

$$y = ax + b,$$

d'où l'on tire

$$b = y - ax = y - \frac{dy}{dx}x.$$

L'équation (1) deviendra alors

$$y' = \frac{dy}{dx}x' + y - \frac{dy}{dx}x, \quad \text{ou} \quad y' - y = \frac{dy}{dx}(x' - x),$$

ce qui est bien l'équation de la tangente au point $(x, y)$.

## DU CERCLE OSCULATEUR.

**232.** Appliquons encore les mêmes considérations au cercle. Ainsi, soit en coordonnées rectangulaires

$$y = f(x)$$

l'équation d'une courbe. Puisque l'équation générale du cercle contient trois constantes arbitraires, le cercle osculateur sera celui qui aura avec la courbe donnée un contact du second ordre. Soit donc

$$(1) \qquad (x - \xi)^2 + (y' - \eta)^2 = \rho^2$$

l'équation de ce cercle inconnu.

On en tire par deux différentiations successives :

$$(2) \qquad x-\xi+(y'-\eta)\frac{dy'}{dx}=0,$$

$$(3) \qquad 1+\frac{dy'^2}{dx^2}+(y'-\eta)\frac{d^2y'}{dx^2}=0.$$

Comme on doit avoir

$$y'=y,\quad \frac{dy'}{dx}=\frac{dy}{dx},\quad \frac{d^2y'}{dx^2}=\frac{d^2y}{dx^2},$$

si l'on remplace dans les relations précédentes $y'$, $\frac{dy'}{dx'}$, $\frac{d^2y'}{dx^2}$, respectivement par $y$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx}$, on aura pour déterminer $\xi$, $\eta$, $\rho$ les trois équations

$$(4) \qquad (x-\xi)^2+(y-\eta)^2=\rho^2,$$

$$(5) \qquad (x-\xi)+(y-\eta)\frac{dy}{dx}=0,$$

$$(6) \qquad 1+\frac{dy^2}{dx^2}+(y-\eta)\frac{d^2y}{dx^2}=0,$$

$x$ et $y$ étant les coordonnées du point de contact.

On tire de ces équations,

$$\eta-y=\frac{1+\frac{dy^2}{dx}}{\frac{d^2y}{dx^2}},\qquad \xi-x=\frac{\frac{dy}{dx}\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

et enfin,

$$\rho^2=\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)=\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^3}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2},$$

d'où

$$\rho=\pm\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

233. Le numérateur de cette expression étant positif,

il faut prendre le signe $+$ ou le signe $-$ suivant que $\frac{d^2y}{dx^2}$ est $>0$ ou $<0$, si l'on veut avoir la valeur absolue de $\rho$.

L'équation (6) montre que $\eta - y$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$ sont toujours de même signe. Comme $\eta - y$ est la différence entre l'ordonnée du centre du cercle et l'ordonnée du point de contact, il en résulte que le centre du cercle osculateur est toujours dans la concavité de la courbe.

La courbe et le cercle osculateur ayant la même tangente, le centre du cercle osculateur est sur la normale à la courbe au point $(x, y)$; on peut encore le conclure de l'équation (5) mise sous la forme

$$(7) \qquad \frac{y-\eta}{x-\xi} \cdot \frac{dy}{dx} = -1,$$

d'où résulte que la droite dont le coefficient angulaire est $\frac{y-\eta}{x-\xi}$, c'est-à-dire la droite qui unit le point de contact au centre du cercle osculateur, est perpendiculaire à la tangente commune.

Le cercle osculateur ayant avec la courbe un contact qui est en général du second ordre, par conséquent d'ordre pair, il s'ensuit qu'il traverse la courbe, excepté en certains points particuliers où le contact est d'un ordre supérieur au second. Dans ce dernier cas, si le contact est d'ordre impair, la courbe et son cercle osculateur sont du même côté de la tangente commune.

On appelle souvent le cercle osculateur *cercle de courbure*; son centre et son rayon *centre* et *rayon de courbure*. Nous en verrons plus tard la raison.

**234.** Comme exemple, proposons-nous d'obtenir le rayon de courbure MK d'une section conique, en un point quelconque.

Supposons cette courbe rapportée à l'un de ses axes de figure, et à la tangente au sommet; son équation sera

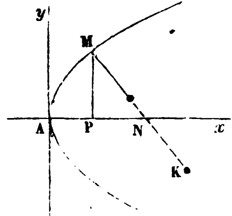


Fig. 36.

(1) $y^2 = 2px + qx^2.$

En différentiant deux fois cette équation, on trouve

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p + qx}{y},$$

$$y\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = q,$$

et, en mettant pour $\frac{dy}{dx}$ sa valeur,

$$y\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{p^2 + 2pqx + q^2x^2}{y^2} = q,$$

ou enfin

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{p^2}{y^3}.$$

Par suite, on a pour la valeur absolue de $\rho$,

$$\rho = \frac{y^3\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{p^2}.$$

Le numérateur de $\rho$ est le cube de la normale MN. En effet, le triangle rectangle MNP donne

$$\text{MN}^2 = n^2 = y^2 + y^2\frac{dy^2}{dx^2}, \quad \text{ou} \quad n = y\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}};$$

d'où

$$y^3\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}} = n^3.$$

Donc

$$\rho = \frac{n^3}{p^2}.$$

Ainsi, *dans toute section conique, le rayon de courbure est égal au cube de la normale, divisé par le carré du demi-paramètre.*

Il est, du reste, facile d'obtenir la valeur de $\rho$ en fonction seulement de l'abscisse du point M. En effet,

$$y^2 = 2px + qx^2 \quad \text{et} \quad y\frac{dy}{dx} = p + qx;$$

on a, par suite,

$$n^2 = 2px + qx^2 + (p+qx)^2 = (q+q^2)x^2 + 2pqx + 2px + p^2.$$

Donc

$$\rho = \frac{[(q+q^2)x^2 + 2p(1+q)x + p^2]^{\frac{3}{2}}}{p^2}.$$

---

# VINGTIÈME LEÇON.

**Développées et développantes des courbes planes. — Propriétés générales des développées. — Application à la parabole, à l'ellipse, à l'hyperbole.**

### DÉVELOPPÉES ET DÉVELOPPANTES.

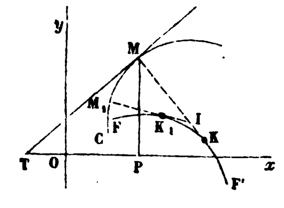
**235.** Nous avons vu qu'en appelant $\xi$ et $\eta$ les coordonnées du centre de courbure correspondant au point M de la courbe CM, on avait, pour déterminer ces deux quantités, les équations

$$(1) \qquad x - \xi + (y - \eta)\frac{dy}{dx} = 0,$$

$$(2) \qquad 1 + \frac{dy^2}{dx^2} + (y - \eta)\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Les centres de courbure K, $K_1, \ldots$, forment une nouvelle courbe que l'on appelle la *développée* de la courbe CM, et celle-ci est appelée la *développante* de KF; nous verrons bientôt la raison de ces dénominations.

*Fig.* 37.




Puisque les équations (1) et (2) avec l'équation

$$(3) \qquad f(x, y) = 0,$$

de la courbe donnée CM, déterminent les coordonnées $\xi$ et $\eta$ du centre de courbure K, répondant au point donné M $(x, y)$ de la courbe CM, on aura l'équation du lieu des points K, en éliminant $x$ et $y$ entre les équations (1), (2) et (3).

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DE LA DÉVELOPPÉE.

**236.** La développée jouit de propriétés générales très-remarquables.

En premier lieu, *tous les rayons de courbure* MK, $M_1K_1,\ldots$, ou les normales à la première courbe, touchent *la développée aux points* K, $K_1,\ldots$, c'est-à-dire *aux centres de courbure.*

En effet, si l'on prend $x$ pour variable indépendante, et que l'on différentie l'équation (1), en y regardant $y$, $\frac{dy}{dx}$, $\xi$ et $\eta$ comme des fonctions de $x$, on a

$$dx - d\xi + (dy - d\eta)\frac{dy}{dx} + (y - \eta)\frac{d^2y}{dx} = 0,$$

ou

$$dx\left[1 + \frac{dy^2}{dx^2} + (y - \eta)\frac{d^2y}{dx^2}\right] - d\xi - d\eta\frac{dy}{dx} = 0,$$

ou bien, à cause de l'équation (2),

$$d\xi + d\eta\frac{dy}{dx} = 0,$$

ou enfin

$$(4)\qquad \frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{dx}{dy}.$$

Cette dernière relation montre que la tangente à la développée menée par le point K est perpendiculaire à la tangente menée par le point M à la courbe CM. Donc la tangente à la développée est la droite KM.

**237.** Une conséquence immédiate de cette propriété, c'est que *la développée d'une courbe est le lieu des intersections successives des normales à cette courbe.* En effet, considérons deux de ces normales MK et $M_1K_1$ qui seront par conséquent tangentes à la développée aux points K et $K_1$. Soit I le point où elles se coupent : quand $M_1$ se rapproche indéfiniment de M, $M_1K_1$ se

rapproche de MK, et l'angle $K_1IK$ tend vers deux angles droits. Donc $K_1K$ est le plus grand côté du triangle $K_1IK$, et comme ce côté tend vers zéro, il en sera de même de IK. Par conséquent le point I se meut sur la droite fixe MK en se rapprochant indéfiniment de K, que l'on peut considérer comme le point d'intersection de la normale MK et de la normale infiniment voisine.

238. *La différence entre deux rayons de courbure* MK *et* $M_1K_1$ *est égale à l'arc* $K_1K$ *de la développée, compris entre les deux centres de courbure correspondants.*

Pour cela, différentions l'équation

$$\rho^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2,$$

en y regardant $y$, $\xi$, $\eta$ et $\rho$ comme des fonctions de la variable indépendante $x$. Il vient ainsi

$$\rho\, d\rho = (x-\xi)(dx - d\xi) + (y-\eta)(dy - d\eta),$$

ou

$$\rho\, d\rho = dx\left[x - \xi + (y-\eta)\frac{dy}{dx}\right] - (x-\eta)\, d\xi - (y-\eta)\, d\eta,$$

ce qui, d'après l'équation (1), se réduit à

$$\rho\, d\rho = -(x-\xi)\, d\xi - (y-\eta)\, d\eta,$$

d'où l'on tire, en désignant par $\sigma$ l'arc FK,

$$\frac{d\rho}{d\sigma} = \left(\frac{\xi - x}{\rho}\cdot\frac{d\xi}{d\sigma} + \frac{\eta - y}{\rho}\cdot\frac{d\eta}{d\sigma}\right).$$

Mais le second membre est le cosinus de l'angle que la droite MK fait avec la tangente à la développée au point K. Comme cet angle est nul, son cosinus est égal à l'unité, et l'on a

$$d\rho = d\sigma.$$

De cette équation on conclut,

$$\rho = \sigma + C,$$

C désignant une constante; on aura de même

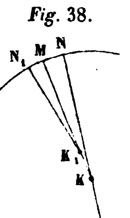
$$\rho_1 = \sigma_1 + C:$$

donc

$$\rho - \rho_1 = \sigma - \sigma_1 = \text{arc FK} - \text{arc FK}_1 = \text{arc KK}_1.$$

**239.** On peut aussi concevoir cette propriété comme une conséquence de ce que la développée est le lieu des intersections successives des normales à la courbe donnée. En effet, remplaçons un petit arc $KK_1$ de la développée par sa corde, et supposons que cette ligne prolongée rencontre la courbe en M. KM différera très-peu de la normale KN menée par le point K, et $K_1 M$ très-peu de la normale $K_1 N_1$ menée par le point $K_1$, en sorte qu'on aura, en négligeant des infiniment petits du second ordre,

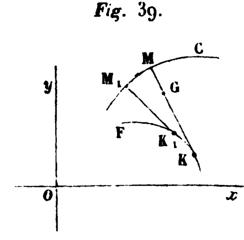
*Fig.* 38.




$$KK_1 = KM - K_1 M = KN - K_1 N_1.$$

C'est cette propriété de la courbe FK qui lui a fait donner le nom de développée. En effet, imaginons un fil dont une partie soit enroulée autour de FK, et dont l'autre partie, tendue suivant la tangente $K_1 M_1$, se termine en $M_1$ sur la courbe CM. Je dis que si l'on déroule ce fil en le tenant toujours tendu, son extrémité décrira la courbe CM. Car supposons que la partie rectiligne soit maintenant dirigée suivant la tangente KM, et que l'extrémité aboutisse au point G : on a

*Fig.* 39.




$$GK = M_1 K_1 + K_1 K,$$

puisque $K_1 K$ est la partie qui est devenue rectiligne. Mais d'ailleurs on a aussi $MK = M_1 K_1 + K_1 K$. On aura donc $GK = MK$. Donc G est en M sur la courbe CM, donc l'extrémité du fil décrira la courbe CM.

**240.** On voit par là qu'une même courbe FK a une infinité de développantes, et que pour les décrire il suffira

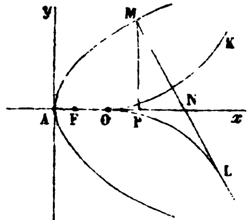
d'allonger ou de diminuer le fil d'une quantité arbitraire. Les tangentes à FK sont normales à toutes les développantes, d'où il suit que celles-ci ont les mêmes normales et les mêmes centres de courbure ; et comme elles interceptent sur leurs normales communes des longueurs constantes, on peut, au moyen d'une développante, obtenir toutes les autres.

**241.** Si une courbe est algébrique, les rayons de ses cercles osculateurs auront aussi une expression algébrique d'après les formules trouvées précédemment : par conséquent, un arc de la développée, qui est la différence de deux de ces rayons, aura, dans ce cas, une expression algébrique, et cette courbe sera rectifiable.

### RAYON DE COURBURE ET DÉVELOPPÉE DE LA PARABOLE.

**242.** Appliquons maintenant cette théorie à la parabole dont l'équation est

*Fig.* 40.




$$y^2 = 2px.$$

Nous avons trouvé, en désignant par $n$ la normale MN, et par $\rho$ le rayon de courbure au point M,

$$\rho = \frac{n^3}{p^2}.$$

Si l'on veut exprimer ce rayon en fonction des coordonnées du point M, il faudra différentier deux fois l'équation $y^2 = 2px$, ce qui donne

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{p^2}{y^3}.$$

Donc on a, en valeur absolue,

$$\rho = \frac{\left(1 + \frac{p^2}{y^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{p^2}{y^3}} = \frac{(y^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2}.$$

Pour avoir maintenant l'équation de la développée, substituons les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ et de $\frac{d^2y}{dx^2}$ dans les équations

$$x - \xi + (y - \eta)\frac{dy}{dx} = 0,$$

$$1 + \frac{dy^2}{dx^2} + (y - \eta)\frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

il vient les équations

$$x - \xi + (y - \eta)\frac{p}{y} = 0, \quad 1 + \frac{p^2}{y^2} - (y - \eta)\frac{p^2}{y^3} = 0.$$

L'élimination de $x$ et de $y$ entre ces équations et celle de la courbe conduit à l'équation de la développée. De la séconde on tire

$$1 + \frac{p^2}{y^2} - \frac{p^2}{y^2} + \frac{p^2\eta}{y^3} = 0 \quad \text{ou} \quad \eta = -\frac{y^3}{p^2}.$$

En mettant cette valeur de $\eta$ dans la première, on aura

$$x - \xi + p + \frac{y^2}{p} = 0,$$

d'où

$$\xi - p = 3x.$$

On a donc

$$y^3 = -p^2\eta, \quad x = \frac{1}{3}(\xi - p) \quad \text{et} \quad y^2 = 2px,$$

d'où

$$y^6 = p^4\eta^2$$

et

$$y^6 = (2px)^3 = \left[\frac{2}{3}p(\xi - p)\right]^3.$$

Donc

$$p^4\eta^2 = \frac{8}{27}p^3(\xi - p)^3,$$

et

$$\eta^2 = \frac{8}{27p}(\xi - p)^3.$$

Si l'on transporte l'axe des ordonnées parallèlement à lui-même jusqu'au point O, tel que AO $= p$, l'équation prend la forme plus simple $\eta^2 = \frac{8}{27p}\xi'^3$, ou simple-

ment

$$\eta = \pm \sqrt{\frac{8}{27p}}\, \xi^{\frac{3}{2}}.$$

En construisant cette courbe, on reconnaît qu'elle a la forme KOL (*fig.* 40, page 216). Elle est symétrique par rapport à l'axe des abscisses, ce qui était évident à priori, et s'étend à l'infini du côté des $x$ positifs.

En différentiant, on trouve

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{8}{27p}}\, \xi^{\frac{1}{2}},$$

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{8}{27p}} \cdot \xi^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{6p}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\xi}}.$$

Le signe de $\frac{d^2\eta}{d\xi^2}$ est le même que celui de $\eta$; par conséquent, la courbe est partout convexe vers l'axe des abscisses.

RAYON DE COURBURE ET DÉVELOPPÉE DE L'ELLIPSE.

**243.** Soit

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$$

l'équation d'une ellipse rapportée à son centre et à ses axes. On en tire

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2 y^3}.$$

Cela posé, la formule connue du rayon de courbure donne

$$\rho = \frac{\left(1 + \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{b^4}{a^2 y^3}} = \frac{(b^4 x^2 + a^4 y^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4}.$$

Pour avoir la développée de l'ellipse, reprenons les deux équations

(1) $$1 + \frac{dy^2}{dx^2} + (y - \eta)\frac{d^2 y}{dx^2} = 0,$$

(2) $$x - \xi + (y - \eta)\frac{dy}{dx} = 0.$$ *

* [illegible] §243, 233. &c. Vol. 1.

En y remplaçant $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$ par leurs valeurs, l'équation (1) devient

$$a^4y^3 + b^4x^2y - a^2b^4(y - \eta) = 0,$$

ou
$$y - \eta = \frac{(a^4y^2 + b^4x^2)y}{a^2b^4}$$
$$= \frac{a^4y^2 + b^2(a^2b^2 - a^2y^2)}{a^2b^4}y$$
$$= \frac{(a^2 - b^2)y^2 + b^4}{b^4}y;$$

et posant $a^2 - b^2 = c^2$, il viendra

$$y - \eta = \frac{(b^4 + c^2y^2)y}{b^4} = y + \frac{c^2y^3}{b^4};$$

ou enfin

$$(3) \qquad \eta = -\frac{c^2y^3}{b^4}.$$

En changeant dans la relation (3) $x$ en $y$ et $y$ en $x$, puis $a$ en $b$ et $b$ en $a$, ce qui change $c^2$ en $-c^2$, on aura

$$(4) \qquad \xi = \frac{c^2x^3}{a^4}.$$

Par conséquent, si l'on pose, pour abréger, $\frac{c^2}{a} = A$ et $\frac{c^2}{b} = B$, on a

$$\frac{x}{a} = \left(\frac{\xi}{A}\right)^{\frac{1}{3}} \quad \text{et} \quad \frac{y}{b} = -\left(\frac{\eta}{B}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation de l'ellipse, mise sous la forme

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1,$$

on a, pour l'équation de la développée,

$$(\alpha) \qquad \left(\frac{\xi}{A}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{\eta}{B}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

1888
Jan 15

La courbe représentée par cette équation est symétrique par rapport aux axes de l'ellipse, comme, du reste, on pouvait le prévoir.

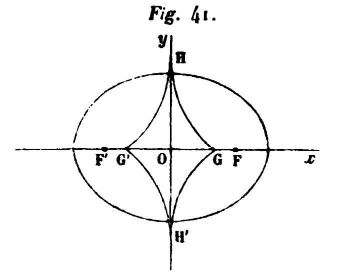


*Fig.* 41.

Pour $\eta = 0$, on a

$$\xi = \pm A = \pm \frac{c^2}{a},$$

ce qui donne deux points G, G', situés sur l'axe des $x$ entre les foyers. On obtiendra de même les points H, H', où la courbe rencontre l'axe des $y$.

En différentiant l'équation de la courbe deux fois de suite, on aura

$$\left(\frac{\xi}{A}\right)^{-\frac{1}{3}} \frac{d\xi}{A} + \left(\frac{\eta}{B}\right)^{-\frac{1}{3}} \frac{d\eta}{B} = 0,$$

$$\left(\frac{\xi}{A}\right)^{-\frac{4}{3}} \frac{d\xi^2}{A^2} - \frac{1}{3}\left(\frac{\eta}{B}\right)^{-\frac{4}{3}} \frac{d\eta^2}{B^2} + \left(\frac{\eta}{B}\right)^{-\frac{4}{3}} \frac{d^2\eta}{B} = 0.$$

De là on tire

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \frac{\left(\frac{\xi}{A}\right)^{-\frac{4}{3}} \frac{1}{A^2} + \left(\frac{\eta}{B}\right)^{-\frac{4}{3}} \frac{1}{B^2} \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2}{3\left(\frac{\eta}{B}\right)^{-\frac{1}{3}} \frac{1}{B}}.$$

Or $\frac{d^2\eta}{d\xi^2}$ est de même signe que le dénominateur, puisque le numérateur est positif. Par suite, cette dérivée aura le même signe que $\eta$. Donc la courbe tourne partout sa convexité vers l'axe des $x$.

On a ensuite

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{\left(\frac{\xi}{A}\right)^{-\frac{1}{3}} \frac{1}{A}}{\left(\frac{\eta}{B}\right)^{-\frac{1}{3}} \frac{1}{B}} = -\left(\frac{A\eta}{B\xi}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{B}{A}:$$

cette dérivée étant nulle pour $\xi = 0$ et infinie pour $\eta = 0$, on en conclut que les axes sont tangents à la courbe aux points G, G', H et H', qui, à cause de la symétrie de la figure, doivent être des points de rebroussement.

RAYON DE COURBURE ET DÉVELOPPÉE DE L'HYPERBOLE.

**244.** Le rayon de courbure et la développée de l'hyperbole peuvent se déduire de ce qui précède en changeant $b^2$ en $-b^2$. On a ainsi pour le rayon de courbure

$$\rho = \frac{(b^4 x^2 + a^4 y^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4},$$

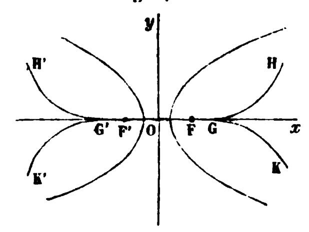
et, pour l'équation de la développée,

$$\left(\frac{\xi}{A}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{\eta}{B}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,$$

en posant $c^2 = a^2 + b^2$, $\frac{c^2}{a} = A$ et $\frac{c^2}{b} = B$.

La développée de l'hyperbole se compose de deux branches infinies HGK, H'G'K', symétriques par rapport aux deux axes; elle a deux points de rebroussement G et G' situés sur l'axe transverse au delà des foyers par rapport au centre et elle est convexe en tous ses points vers l'axe transverse.

*Fig.* 42.



# VINGT ET UNIÈME LEÇON.

*Étude particulière de la cycloïde :* **Définition et équation de la courbe. — Tangente et normale. — Rayon du cercle osculateur. — Développée. — Longueur d'un arc de cycloïde.**

---

### DÉFINITION ET ÉQUATION DE LA CYCLOÏDE.

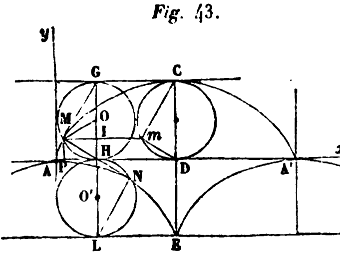
**245.** La *cycloïde* est le lieu des positions d'un point M donné sur un cercle qui *roule sans glisser* sur une droite indéfinie A$x$.

Prenons pour axe des abscisses la droite A$x$, pour origine le point A, où se trouvait le point générateur M à l'origine du mouvement, et pour axe des ordonnées la perpendiculaire A$y$.

On reconnaît, à priori, que l'ordonnée est maxima au point C, correspondant à l'abscisse $\mathrm{AD} = \frac{1}{2}$circ. OM; que la courbe rencontre de nouveau l'axe des $x$ en un point A′ dont l'abscisse est circ. OM, et que la portion CA′ de cette courbe est symétrique de l'arc CA par rapport à CD; ensuite qu'au delà du point A′, comme avant le point A, il existe une infinité d'arcs identiques à ACA′.

Cherchons maintenant l'équation de la courbe. Soient

*Fig.* 43.




$\mathrm{AP} = x$, $\mathrm{MP} = y$ les coordonnées d'un point M du lieu, $\mathrm{MO} = a$ et $\mathrm{MOH} = u$; joignons MO et menons MI perpendiculaire à GH.

D'après le mode même de génération, l'arc MH sera égal à la portion de droite AH. On a

$$x = \mathrm{AH} - \mathrm{PH} = \text{arc}\,\mathrm{MH} - \mathrm{MI} = au - a\sin u = a(u - \sin u),$$

$$y = \mathrm{OH} - \mathrm{IK} = a - a\cos u = a(1 - \cos u).$$

Il ne s'agit donc plus, pour avoir l'équation de la cycloïde, que d'éliminer $u$ entre les deux équations

$$(1) \qquad x = a(u - \sin u),$$

$$(2) \qquad y = a(1 - \cos u).$$

Or la dernière donne

$$\cos u = \frac{a-y}{a} \quad \text{ou} \quad u = \text{arc} \cos \frac{a-y}{a},$$

d'où

$$\sin u = \pm \frac{\sqrt{2ay - y^2}}{a}.$$

Portant ces valeurs dans l'équation (1), on a, pour l'équation de la cycloïde,

$$(3) \qquad x = a \,\text{arc} \cos \frac{a-y}{a} \mp \sqrt{2ay - y^2}.$$

Pour expliquer le double signe du radical ou de $\sin u$, on observe que si le point M est sur l'arc AC, on a $u < \pi$ et $\sin u > 0$. Mais si le point M se rapportait à l'arc CA′, on aurait $u > \pi$ et $\sin u < 0$. Donc le signe supérieur convient à l'arc AC, et le signe inférieur à l'arc CA′.

### TANGENTE ET NORMALE.

**246.** Pour obtenir $\frac{dy}{dx}$, on pourrait différentier l'équation (3), mais il est plus simple de différentier les équations (1) et (2), dans lesquelles $x$ et $y$ sont fonctions de la variable indépendante $u$, ce qui donne

$$dx = a\,du\,(1 - \cos u) = y\,du,$$

$$dy = a \sin u\,du = du \sqrt{2ay - y^2}.$$

Divisant membre à membre, il vient

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2ay - y^2}}{y}.$$

La sous-normale au point M ayant pour valeur $\frac{y\,dy}{dx}$,

on voit qu'elle est égale à $\sqrt{2ay-y^2}$. Or

$$\sqrt{2ay-y^2}=\sqrt{y(2a-y)}=\sqrt{\text{IH}\times\text{IG}}=\text{MI ou PH}.$$

Donc MH est la normale au point M, et, par suite, MG, perpendiculaire à MH, est la tangente en ce point.

De là résulte un moyen très-simple de mener une tangente à la cycloïde en l'un de ses points, M par exemple. Supposons le cercle C$m$D décrit sur l'ordonnée maxima comme diamètre; menons M$m$ parallèle à A$x$: une parallèle à C$m$, menée par le point M, sera la tangente cherchée.

**247.** La longueur de la normale, au point M, a pour expression

$$\sqrt{y^2+\frac{y^2dy^2}{dx^2}}=\sqrt{y^2+2ay-y^2}=\sqrt{2ay}.$$

Or GH $=2a$, IH $=y$. Cette longueur est donc moyenne proportionnelle entre IH et GH; elle est donc la ligne MH elle-même.

### RAYON ET CENTRE DU CERCLE OSCULATEUR.

**248.** On a

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{2ay-y^2}}{y}=\sqrt{\frac{2a}{y}-1};$$

donc $\frac{dy^2}{dx^2}=\frac{2a}{y}-1$, d'où $2\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{d^2x}=-\frac{2a}{y^2}\frac{dy}{dx}$, ou

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{a}{y^2}.$$

Substituant ces valeurs de $\frac{dy}{dx}$ et de $\frac{d^2y}{dx^2}$ dans l'expression connue du rayon de courbure, on trouve

$$\rho^2=\frac{\left(\frac{2a}{y}\right)^3}{\frac{a^2}{y^4}}=\frac{8a^3y}{a^2};\quad \text{donc}\quad \rho=2\sqrt{2ay}.$$

Mais

$$\sqrt{2ay} = \sqrt{GH \times IH} = MH,$$

Donc le rayon de courbure est double de MH, et puisque d'ailleurs MH est la normale au point M, on aura le centre de courbure en prenant sur la direction de MH un point N tel que MN = 2 MH.

### DÉVELOPPÉE DE LA CYCLOÏDE.

**249.** Ce résultat permet de déterminer très-simplement la développée.

Soit HNL un cercle égal au cercle OM, tangent au point H à A$x$, au-dessous de cette droite ; menons LE parallèle à A$x$, et prolongeons le diamètre CD jusqu'à sa rencontre en E avec LE ; les arcs MH et NH étant égaux, on a

$$\text{arc NH} = \text{AH};$$

d'ailleurs

$$\text{arc HNL} = \text{AD}.$$

Donc

$$\text{arc NL} = \text{AD} - \text{AH} = \text{DH} = \text{LE}.$$

Ainsi la développée de la cycloïde est engendrée par le mouvement d'un point N placé sur la circonférence d'un cercle égal au cercle OM, mais qui roulerait sur une parallèle LE à A$x$, au-dessous de cette droite, et à une distance de celle-ci égale au diamètre du cercle mobile. Cette développée est donc une cycloïde égale à la première.

On peut d'ailleurs le démontrer sans connaître la longueur du rayon de courbure. En effet, de même que MG est tangente à AMC, en M, NH ou MN est la tangente en N à la cycloïde ANE. Donc cette dernière courbe est le lieu des intersections successives des normales consécutives à la cycloïde ACA', et par conséquent elle en est la développée.

**250.** On peut retrouver le même résultat par le calcul.

On a

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{2a}{y}-1},\quad \frac{d^2y}{dy^2}=-\frac{a}{y^2}.$$

Substituons ces valeurs dans les équations

$$1+\frac{dy^2}{dx^2}+(y-\eta)\frac{d^2y}{dx^2}=0,$$

$$x-\xi+(y-\eta)\frac{dy}{dx}=0.$$

La première équation donne

$$\frac{2a}{y}-(y-\eta)\frac{a}{y^2}=0 \quad \text{ou bien} \quad 2ay-a(y-\eta)=0,$$

ou enfin

(1) $$y=-\eta.$$

On tire de la seconde équation

$$x-\xi+(y-\eta)\sqrt{\frac{2a}{y}-1}=0,$$

ou, en remplaçant $y$ par sa valeur et transposant,

$$x=\xi+2\eta\sqrt{-\frac{2a}{\eta}-1},$$

ou enfin, en faisant passer $\eta$ sous le radical dont le signe doit être changé, puisque $\eta$ est négatif,

(2) $$x=\xi-2\sqrt{-2a\eta-\eta^2}.$$

Substituant les valeurs (1) et (2) dans l'équation de la cycloïde,

(3) $$x=a\arccos\frac{a-y}{a}-\sqrt{2ay-y^2},$$

on a, pour l'équation de la développée,

(4) $$\xi=a\arccos\frac{a+\eta}{a}+\sqrt{-2a\eta-\eta^2}.$$

Supposons maintenant qu'on prenne pour axes les droites $Ex'$ et $Ey'$; nommons $x'$ et $y'$ les nouvelles coordonnées d'un point quelconque N de la développée : puisque

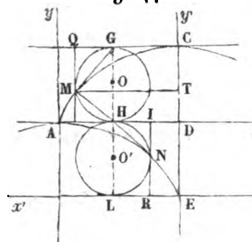


Fig. 44.

$$AD = \pi a, \quad DE = 2a,$$

on aura

$$\xi = AD - DI = \pi a - x',$$
$$\eta = NR - IR = y' - 2a.$$

Substituant ces valeurs de $\xi$ et de $\eta$ dans l'équation (4), l'équation de la développée par rapport aux nouveaux axes devient

$$\pi a - x' = a \arccos \frac{y' - a}{a} + \sqrt{2ay' - y'^2},$$

ou bien

$$x' = a\left(\pi - \arccos \frac{y' - a}{a}\right) - \sqrt{2ay' - y'^2},$$

ou enfin, comme deux arcs supplémentaires ont des cosinus égaux et de signes contraires,

$$x' = a \arccos\left(\frac{a - y'}{a}\right) - \sqrt{2ay' - y'^2}.$$

Cette équation, comparée à l'équation (3), montre que la développée de la cycloïde est une cycloïde égale, placée par rapport aux axes $Ex'$, $Ey'$, comme la proposée par rapport aux axes primitifs.

### LONGUEUR D'UN ARC DE CYCLOÏDE.

**251.** La ligne MN double de HN est le rayon de courbure correspondant au point M de la cycloïde développante, ou la tangente en N à la cycloïde ANE développée de la première. De plus, au point A, le rayon de courbure

est nul puisque la normale MH devient nulle pour ce point. Donc, comme un arc de développée est égal à la différence des rayons de courbure extrêmes, on a

$$\text{arc AK} = \text{MN} = 2\,\text{NH}.$$

En revenant à la cycloïde proposée, on peut dire que l'arc CM est égal à 2 MG.

Exprimons maintenant cet arc en fonction des coordonnées de son extrémité.

On a

$$\text{arc CM} = 2\,\text{MG} = 2\sqrt{2a.\text{MQ}},$$

ou bien, puisque $\text{MQ} = 2a - y$,

$$\text{arc CM} = 2\sqrt{4a^2 - 2ay}.$$

252. On peut encore parvenir à ce résultat par le calcul.

En effet, soit $\text{CM} = s$ un arc compté à partir du sommet C; on aura

$$ds = \pm\, dy\sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}}.$$

Or on a $$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{\sqrt{2ay - y^2}};$$

donc,

$$ds = \pm\, dy\,\frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{2a - y}}.$$

Mais l'arc CM diminue lorsque $y$ augmente; on doit donc prendre le signe —, et écrire

$$ds = -\,dy\,\frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{2a - y}} = d\left(2\sqrt{2a}\sqrt{2a - y}\right),$$

donc $$s = 2\sqrt{2a}\sqrt{2a - y} + \text{C},$$

ou $$s = 2\sqrt{4a^2 - 2ay} + \text{C}.$$

C est une constante que l'on détermine en faisant $y = 2a$, ce qui donne $s = 0$ et par suite $C = 0$. On a donc, comme plus haut,

$$\text{arc CM} = 2\sqrt{4a^2 - 2ay}.$$

253. Si l'on suppose $y = 0$, on aura

$$\text{arc CA} = 4a,$$

et par suite

$$\text{arc ACA}' = 8a.$$

Ainsi *l'arc entier de la cycloïde est égal à quatre fois le diamètre du cercle générateur*.

# VINGT-DEUXIÈME LEÇON.

Expression du rayon de courbure, quand la variable indépendante est quelconque. — Application aux coordonnées polaires. — Théorie de la courbure des courbes planes. — Identité du cercle de courbure et du cercle osculateur. — Applications.

## EXPRESSION DU RAYON DE COURBURE QUAND LA VARIABLE INDÉPENDANTE EST QUELCONQUE.

**254.** En prenant $x$ pour variable indépendante, nous avons trouvé

$$\rho = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Supposons maintenant que $x$ et $y$ soient fonctions d'une autre variable $t$, et cherchons, dans cette hypothèse, l'expression de $\rho$. On sait (85) que $\frac{dy}{dx}$ conserve la même forme, et que $\frac{d^2y}{dx^2}$ doit être remplacé par $\frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3}$.

On aura donc

$$\rho = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3}},$$

ou bien

$$(1) \qquad \rho = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y - dy\,d^2x},$$

expression dans laquelle les différentielles de $x$ et de $y$ sont prises en regardant $t$ comme variable indépendante.

Exemple. — La cycloïde est représentée par l'ensemble

des deux équations

$$x = a(u - \sin u), \quad y = a(1 - \cos u).$$

De là on déduit, en prenant $u$ pour variable indépendante,

$$dx = a(1 - \cos u)\,du, \quad d^2x = a \sin u\,du^2,$$
$$dy = a \sin u\,du, \quad d^2y = a \cos u\,du^2.$$

Par conséquent,

$$dx^2 + dy^2 = (1 - 2\cos u + \cos^2 u + \sin^2 u)\,a^2\,du^2,$$
$$dx\,d^2y - dy\,d^2x = (\cos u - \cos^2 u - \sin^2 u)\,a^2\,du^3,$$

ou

$$dx^2 + dy^2 = 2(1 - \cos u)\,a^2\,du^2,$$
$$dx\,d^2y - dy\,d^2x = -(1 - \cos u)\,a^2\,du^3.$$

Par suite

$$\rho = 2^{\frac{3}{2}} \frac{(1 - \cos u)^{\frac{3}{2}}\,a^3\,du^3}{(1 - \cos u)\,a^2\,du^3} = 2a\sqrt{2}\,(1 - \cos u)^{\frac{1}{2}}.$$

Or

$$1 - \cos u = \frac{y}{a}.$$

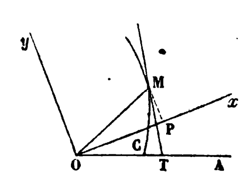
Donc

$$\rho = 2a\sqrt{2}\sqrt{\frac{y}{a}} = 2\sqrt{2ay}.$$

EXPRESSION DU RAYON DE COURBURE EN COORDONNÉES POLAIRES.

255. La formule (1) conduit à l'expression du rayon de courbure au point M, en fonction des coordonnées polaires de ce point. Pour cela, menons par le pôle deux axes rectangulaires $Ox$ et $Oy$. Soient

*Fig.* 45.




$$xOA = \alpha, \quad OP = x, \quad MP = y,$$
$$OM = r, \quad MOA = \theta,$$

on aura

$$x = r\cos(\theta - \alpha), \quad y = r\sin(\theta - \alpha),$$

ou en posant, pour abréger, $\theta - \alpha = \theta'$,

$$x = r \cos \theta', \quad y = r \sin \theta'.$$

De là on tire, en observant que $d\theta' = d\theta$,

$$dx = dr \cos \theta' - r d\theta \sin \theta',$$
$$dy = dr \sin \theta' + r d\theta \cos \theta',$$
$$d^2 x = d^2 r \cos \theta' - 2\, dr \sin \theta' - r d\theta^2 \cos \theta',$$
$$d^2 y = d^2 r \sin \theta' + 2\, dr\, d\theta \cos \theta' - r d\theta^2 \sin \theta'.$$

On aura donc

$$dx^2 + dy^2 = dr^2 \cos^2 \theta' + r^2 \sin^2 \theta' d\theta^2 + dr^2 \sin^2 \theta' + r^2 \cos^2 \theta' d\theta^2$$
$$= dr^2 (\sin^2 \theta' + \cos^2 \theta') + r^2 d\theta^2 (\sin^2 \theta' + \cos^2 \theta'),$$

et toutes réductions faites,

(2) $$dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2.$$

De même

$$dx\, d^2 y - dy\, d^2 x$$
$$= (dr \cos \theta' - r d\theta \sin \theta')(d^2 r \sin \theta' + 2\, dr d\theta \cos \theta' - r d\theta^2 \sin \theta')$$
$$- (dr \sin \theta + r d\theta \cos \theta')(d^2 r \cos \theta' - 2\, dr \sin \theta' - r d\theta^2 \cos \theta')$$
$$= d^2 r (dr \sin \theta' \cos \theta' - r d\theta \sin^2 \theta' - dr \sin \theta' \cos \theta' - r d\theta \cos^2 \theta')$$
$$+ 2\, dr^2 (d\theta \cos^2 \theta' + d\theta \sin^2 \theta') + r^2 (\sin^2 \theta' d\theta^3 + \cos^2 \theta' d\theta^3),$$

ou, en simplifiant,

(3) $$dx\, d^2 y - dy\, d^2 x = 2\, dr^2 d\theta - r d\theta\, d^2 r + r^2 d\theta^3.$$

Substituant les valeurs (2) et (3) dans la formule (1), on obtient

$$\rho = \frac{(dr^2 + r^2 d\theta^2)^{\frac{3}{2}}}{2\, dr^2 d\theta - r d^2 r d\theta + r^2 d\theta^3},$$

ou bien

(4) $$\rho = \frac{\left(r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2 \frac{dr^2}{d\theta^2} - r \frac{d^2 r}{d\theta^2}}.$$

Ce résultat s'obtient d'ailleurs plus simplement en faisant coïncider l'axe OX avec OM. Il faut faire alors $\alpha = \theta$, et l'on a

$$dx = dr, \quad dy = rd\theta,$$
$$d^2x = d^2r - rd\theta^2, \quad d^2y = 2drd\theta.$$

**256.** On introduit quelquefois, au lieu du rayon vecteur $r$, sa valeur inverse dans l'expression du rayon de courbure. Soit

$$r = \frac{1}{u},$$

on aura

$$dr = -\frac{du}{u^2}, \quad d^2r = \frac{2du^2 - ud^2u}{u^3}.$$

Donc on a

$$\rho = \frac{\left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{u^4}\frac{du^2}{d\theta^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{u^2} + \frac{2}{u^4}\frac{du^2}{d\theta^2} + \frac{ud^2u - 2du^2}{u^4d\theta^2}} = \frac{\left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{u^4}\frac{du^2}{d\theta^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{u^2} + \frac{1}{u^3}\cdot\frac{d^2u}{d\theta^2}},$$

ou enfin

$$(5) \qquad \rho = \frac{\left(u^2 + \frac{du^2}{d\theta^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{u^3\left(u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right)}.$$

**257.** Exemples. 1°. *Courbes du second degré.* L'équation générale des courbes du second degré, rapportées à un foyer et à l'axe focal, est

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta} \quad \text{ou} \quad u = \frac{1 + e\cos\theta}{p}.$$

On aura, dans ce cas,

$$du = -\frac{e}{p}\sin\theta\, d\theta, \quad d^2u = -\frac{e}{p}\cos\theta\, d\theta^2,$$

et la formule (5) donnera

$$\rho = \frac{\left[\frac{(1+e\cos\theta)^2}{p^2} + \frac{e^2}{p^2}\sin^2\theta\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{(1+e\cos\theta)^3}{p^3}\left[\frac{1+e\cos\theta}{p} - \frac{e}{p}\cos\theta\right]},$$

ou bien $$\rho = p\,\frac{(1+2e\cos\theta+e^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+e\cos\theta)^3}.$$

2°. *Spirale logarithmique* : $r = ae^{m\theta}$.

On tire de cette équation :

$$\frac{dr}{d\theta} = mae^{m\theta} = mr,\quad \frac{d^2r}{d\theta^2} = \frac{mdr}{d\theta} = m^2r.$$

Substituant ces valeurs dans la formule (1), on a

$$\rho = \frac{[r^2(1+m^2)]^{\frac{3}{2}}}{r^2(1+m^2)}$$

ou bien

$$\rho = r\sqrt{1+m^2}.$$

Soient MK la normale et OK la sous-normale du point considéré. Le triangle rectangle KOM donne

$$\text{MK} = \sqrt{\overline{\text{OM}}^2 + \overline{\text{OK}}^2} = \sqrt{r^2 + r^2\,\text{tang}^2\,\text{OMK}}.$$

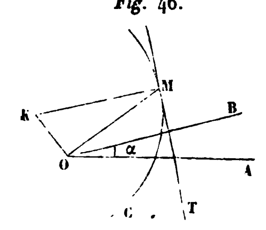
Or on a $$\text{tang OMK} = \cot\text{OMT} = m,$$

donc $$\text{MK} = r\sqrt{1+m^2}.$$

Ainsi l'extrémité K de la sous-normale est le centre de courbure.

Pour trouver l'équation de la développée, prenons un nouvel axe polaire OB, incliné sur le premier d'un angle $\alpha$. K étant l'un quelconque des points du lieu, soient $\text{OK} = r'$ et $\text{KOB} = \theta'$ : on aura

*Fig.* 46.




$$r' = mr,\quad \text{ou}\quad r' = mae^{m\theta};$$

mais $\theta' + \alpha = \theta + \frac{\pi}{2}$; donc l'équation de la développée sera

$$r' = mae^{m\theta' + m\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}$$

ou bien

$$r' = ae^{m\theta'} \times me^{m\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}.$$

Comme $\alpha$ est arbitraire, déterminons cette quantité de telle sorte que l'on ait

$$me^{m\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)} = 1,$$

ce qui donne

$$\mathrm{l}m + m\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \text{ou} \quad \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\mathrm{l}m}{m}:$$

l'équation de la développée deviendra

$$r' = ae^{m\theta'},$$

ce qui montre que *la développée est une spirale logarithmique égale à la première, mais différemment placée.*

DE LA COURBURE DES COURBES PLANES.

258. On doit considérer la courbure d'une circonférence comme étant la même en tous ses points, et d'autant plus grande, que son rayon R est plus petit, ou que la valeur inverse $\frac{1}{R}$ est plus grande. Il est donc naturel de prendre $\frac{1}{R}$ pour mesure de la courbure du cercle.

On conçoit mieux cela si l'on considère un cercle tangent à une droite en un point, et que l'on éloigne de plus en plus le centre sur la perpendiculaire à cette droite en ce point. Le cercle mobile, dans une de ses positions, sera compris entre la droite fixe et le cercle précédent, et par

conséquent il s'approchera d'autant plus de la droite, que son rayon sera plus grand.

Soient MT et M′T′ deux tangentes à une circonférence dont le rayon MK est égal à R, et soit HIM′ $= \omega$. On aura

*Fig.* 47.

$$\text{arc MM}' = \text{R}\,\omega,$$

puisque l'angle MKM′ est égal à HIM′; donc on a

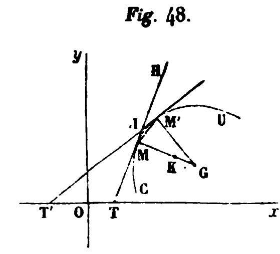
$$\frac{1}{\text{R}} = \frac{\omega}{\text{arc MM}'}.$$

Ainsi la courbure d'un cercle est égale à l'angle de deux tangentes divisé par l'arc compris entre les points de contact.

**259.** Considérons maintenant une courbe quelconque CMM′U, C étant un point fixe de cette courbe; soient CM $= s$, MM′ $= \Delta s$, $\tau$ l'angle MT$x$, $\tau'$ l'angle M′T′$x$, formés par les tangentes MT et M′T′ avec O$x$, et $\Delta\tau$ la différence de ces angles, c'est-à-dire l'angle HIM′.

Si la courbe était une circonférence de cercle, $\frac{\Delta\tau}{\Delta s}$ serait sa courbure au point M, et ce rapport serait indépendant de $\Delta s$. Quand la courbe est quelconque, le rapport $\frac{\Delta\tau}{\Delta s}$, qui varie avec $\Delta s$, est appelé la *courbure moyenne* de l'arc MM′, et l'on nomme *rayon de courbure moyenne* le rayon d'un cercle dans lequel les tangentes menées aux extrémités d'un arc égal à $\Delta s$, font entre elles un angle égal à $\Delta\tau$. Le rayon de ce cercle est $\frac{\Delta s}{\Delta\tau}$,

*Fig.* 48.




Supposons maintenant que le point M′ se rapproche

indéfiniment du point M : le rapport $\frac{\Delta\tau}{\Delta s}$ convergera vers $\frac{d\tau}{ds}$, qui sera dit la courbure de la courbe au point M. Concevons un cercle ayant la même courbure, et soit $\rho$ son rayon : on aura

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\tau}{ds} \quad \text{ou} \quad \rho = \frac{ds}{d\tau}.$$

Si l'on prend sur la partie intérieure de la normale $MK = \rho$, le cercle décrit du point K comme centre avec MK comme rayon sera *le cercle de courbure*, le rayon et le centre de ce cercle seront *le rayon et le centre de courbure* correspondant au point M.

On appelle *angle de contingence* l'angle $d\tau$ formé par les tangentes menées aux extrémités d'un arc infiniment petit. On peut donc dire que la courbure d'une courbe est égale à l'angle de contingence divisé par la différentielle de l'arc.

### IDENTITÉ DU CERCLE DE COURBURE ET DU CERCLE OSCULATEUR.

260. Le cercle de courbure est le même que le cercle osculateur, déterminé par la théorie des contacts; en effet, on a

$$ds = dx\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}},$$

$$d\tau = d\left(\text{arc tang}\,\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d\,\frac{dy}{dx}}{1 + \frac{dy^2}{dx^2}};$$

donc

$$\frac{ds}{d\tau} = \rho = \frac{\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}{\frac{d\,\frac{dy}{dx}}{dx}}$$

ou

$$\rho = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

ce qui montre bien que $\rho$, *ou le rayon de courbure, est égal au rayon du cercle osculateur*, et, par suite, que *le cercle de courbure se confond avec le cercle osculateur.*

**261.** On peut démontrer le même fait d'une autre manière. Soient MK et M'G les normales en M et en M' à la courbe donnée; soit G leur intersection, et soit MK le rayon de courbure pour le point M. Joignons MM'; on a

$$MG : MM' = \sin MM'G : \sin G,$$

d'où

$$MG = \frac{MM' \sin MM'G}{\sin G},$$

ou bien

$$MG = \frac{MM'}{\text{arc}\, MM'} \times \frac{G}{\sin G} \times \frac{\text{arc}\, MM'}{G} \times \sin MM'G.$$

A la limite, quand le point M' vient coïncider avec M, la droite MM' devient tangente : par suite l'angle MM'G devient droit, et son sinus a pour valeur l'unité. On a d'ailleurs

$$\lim \frac{MM'}{\text{arc}\, MM'} = 1, \quad \lim \frac{G}{\sin G} = 1,$$

$$\lim \frac{\text{arc}\, MM'}{G} = \lim \frac{\Delta s}{\Delta \tau} = \frac{ds}{dt}:$$

donc

$$\lim MG = \frac{ds}{d\tau} = MK.$$

Ainsi le centre de courbure K est l'intersection de deux normales infiniment voisines : donc il se confond avec le centre du cercle osculateur; et par suite le rayon de courbure (259) est aussi le rayon du cercle osculateur.

**262.** Nous avons démontré l'identité du rayon de courbure et du rayon du cercle osculateur en déduisant la valeur de ce dernier de celle du rayon de courbure : nous pouvons parvenir au même résultat en suivant une marche inverse, c'est-à-dire en déduisant la valeur du rayon de courbure de celle du rayon du cercle osculateur.

En effet, le rayon du cercle osculateur au point M est

$$\rho = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 y}{dx^2}} = dx\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} : \frac{d\frac{dy}{dx}}{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}.$$

Or,

$$dx\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = \sqrt{dx^2 + dy^2} = ds,$$

$$\frac{d\frac{dy}{dx}}{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = d\left(\operatorname{arc tang}\frac{dy}{dx}\right) = d\tau.$$

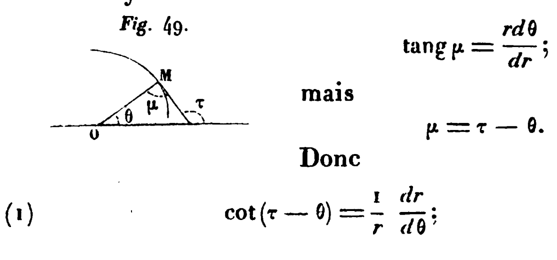
Donc

$$\rho = \frac{ds}{d\tau}.$$

EXPRESSION DU RAYON DE COURBURE EN COORDONNÉES POLAIRES.

**263.** Pour obtenir l'expression du rayon de courbure en coordonnées polaires, nous partirons de la formule $\rho = \frac{ds}{d\tau}$. Soit $\mu$ l'angle que la tangente au point M fait avec le rayon vecteur : on aura

*Fig.* 49.




$$\operatorname{tang}\mu = \frac{r\,d\theta}{dr};$$

mais

$$\mu = \tau - \theta.$$

Donc

$$(1) \qquad \cot(\tau - \theta) = \frac{1}{r}\,\frac{dr}{d\theta};$$

on en déduit

$$\frac{d\theta - d\tau}{\sin^2(\tau-\theta)} = d\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{dr}{d\theta}\right), \quad \frac{d\tau}{d\theta} = 1 - \sin^2(\tau-\theta)\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{dr}{d\theta}\right).$$

Mais l'équation (1) donne

$$\sin^2(\tau-\theta) = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{dr}{d\theta}\right)^2}.$$

Donc

$$(2) \qquad \frac{d\tau}{d\theta} = \frac{1+\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{dr}{d\theta}\right)}{1+\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{dr}{d\theta}\right)^2}.$$

D'ailleurs nous avons

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2} = r\sqrt{\frac{dr^2}{r^2} + d\theta^2}$$

ou bien

$$(3) \qquad \frac{ds}{d\theta} = r\left[1+\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Donc, en divisant (3) par (2), on aura

$$\rho = \frac{ds}{d\tau} = \frac{\left(r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\frac{dr^2}{d\theta^2} - r\frac{d^2r}{d\theta^2}},$$

formule déjà trouvée (n° 155).

**264.** Appliquons ce résultat à la spirale logarithmique

$$r = ae^{m\theta}.$$

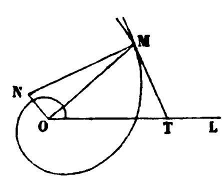
Soient MO $= r$ et MOL $= \theta$ les coordonnées polaires du point M. On a

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2} = d\theta\sqrt{r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}},$$

ou bien, à cause de $\frac{dr}{d\theta} = mr$,

$$ds = rd\theta\sqrt{1+m^2}.$$

*Fig.* 50.




Maintenant on a, en posant l'angle OMT $=\mu$,

$$\tau = \theta + \mu.$$

Or, dans la spirale logarithmique, $\mu$ étant constant, puisque $\tang \mu = \frac{1}{m}$, on a $d\tau = d\theta$.

Par suite

$$\rho = \frac{ds}{d\tau} = r\sqrt{1+m^2},$$

comme on l'a déjà trouvé (n° 257, 2°).

---

# VINGT-TROISIÈME LEÇON.

*Des courbes à double courbure.* — Équations de la tangente. — Angles de la tangente avec les axes de coordonnées. — Plan normal. — Différentielle d'un arc de courbe. — Limite du rapport d'un arc à sa corde.

### ÉQUATIONS DE LA TANGENTE.

**265.** On appelle *courbes à double courbure* celles dont tous les points ne sont pas dans un même plan.

Une courbe à double courbure est représentée, comme on sait, par deux équations

$$(1) \qquad f(x, y, z) = 0,$$

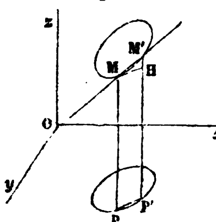
$$(2) \qquad \varphi(x, y, z) = 0,$$

qui appartiennent à deux surfaces dont cette courbe est l'intersection.

On choisit ordinairement pour surfaces auxiliaires des cylindres parallèles aux axes, et alors la courbe est représentée par deux équations dont chacune ne renferme que deux variables.

**266.** Pour obtenir les équations de la tangente à une courbe au point M, nous chercherons d'abord les équations d'une sécante MM'. Soient $x, y, z$, les coordonnées du point M, et $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$, celles du point M'. Les équations de la sécante MM' sont

Fig. 51.




$$Y - y = \frac{\Delta y}{\Delta x}(X - x), \quad Z - z = \frac{\Delta z}{\Delta x}(X - x),$$

X, Y, Z étant les coordonnées courantes.

Or, si le point M' se rapproche indéfiniment du point M, la sécante MM' devient à la limite tangente à la courbe au point M, les coefficients angulaires $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ tendent vers $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{dz}{dx}$, et l'on a, pour les équations de la tangente,

$$(a) \qquad Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x), \qquad Z - z = \frac{dz}{dx}(X - x).$$

Dans ces équations, $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{dz}{dx}$ sont les dérivées de $y$ et de $z$ par rapport à $x$; en les divisant membre à membre, on a pour l'équation de la projection de la tangente sur le plan $yz$,

$$Y - y = \frac{dy}{dz}(Z - z).$$

La forme de ces équations montre que la projection de la tangente sur chaque plan coordonné est tangente à la projection de la courbe sur ce plan, ce qui résulte d'ailleurs de ce qu'au moment où le point M' se réunit au point M, le point P' se réunit au point P.

267. Les coefficients différentiels $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{dz}{dx}$ s'obtiennent par la différentiation des équations (1) et (2), qui donne

$$(\alpha) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{df}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = 0, \\ &\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{d\varphi}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = 0. \end{aligned} \right.$$

En tirant de ces deux équations les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ et de $\frac{dz}{dx}$, et les substituant dans les équations $(a)$, on aurait les équations de la tangente. Mais il revient au même

d'éliminer $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{dz}{dx}$ entre les quatre équations $(\alpha)$ et $(a)$. Or de $(a)$ on tire

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Y-y}{X-x},\quad \frac{dz}{dx}=\frac{Z-z}{X-x}.$$

Substituant ces valeurs dans les équations $(\alpha)$, on a enfin

$$(b)\quad \begin{cases} \frac{df}{dx}(X-x)+\frac{df}{dy}(Y-y)+\frac{df}{dz}(Z-z)=0, \\ \frac{d\varphi}{dx}(X-x)+\frac{d\varphi}{dy}(Y-y)+\frac{d\varphi}{dz}(Z-z)=0. \end{cases}$$

On obtient donc les équations de la tangente en remplaçant, dans les équations différentielles,

$$\frac{df}{dx}dx+\frac{df}{dy}dy+\frac{df}{dz}dz=0,$$

$$\frac{d\varphi}{dx}dx+\frac{d\varphi}{dy}dy+\frac{d\varphi}{dz}dz=0,$$

les différentielles $dx$, $dy$ et $dz$ par les différences $X-x$, $Y-y$, $Z-z$.

### ANGLES DE LA TANGENTE AVEC LES AXES.

**268.** Supposons maintenant que les axes soient rectangulaires, et nommons $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ les angles formés par la tangente avec les trois axes coordonnés $Ox$, $Oy$ et $Oz$.

Dans le trapèze MPP′M′, dont les côtés parallèles sont $MP=z$ et $M'P'=z+\Delta z$, menons MH parallèle à PP′. Soit $\gamma'$ l'angle MM′H, c'est-à-dire l'angle que la sécante MM′ fait avec l'axe OZ. Le triangle rectangle MM′H donne

$$\cos\gamma'=\frac{\Delta z}{MM'}=\frac{\Delta z}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}}.$$

Si $t$ est la variable indépendante, on peut écrire

$$\cos\gamma' = \frac{\frac{\Delta z}{\Delta t}}{\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2}}.$$

Or, quand M′ vient se confondre avec le point M, la sécante devient tangente, $\gamma'$ devient $\gamma$, et l'on a

$$\cos\gamma = \frac{\frac{dz}{dt}}{\sqrt{\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}}},$$

ou bien

$$\cos = \gamma \frac{dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}.$$

Si $dz$ est $> 0$, c'est-à-dire si $z$ croît avec la variable indépendante $t$, on a $\cos\gamma > 0$ et $\gamma < \frac{\pi}{2}$; si, au contraire, $dz$ est $< 0$, on a $\cos\gamma < 0$ et $\gamma > \frac{\pi}{2}$.

On trouve de même $\cos\alpha$ et $\cos\beta$, de sorte qu'en résumé, les trois angles cherchés sont donnés par les formules

$$(c)\quad \left\{\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}},\\ \cos\beta &= \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dx^2}},\\ \cos\gamma &= \frac{dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}. \end{aligned}\right.$$

Si l'arc infiniment petit MM′ est désigné par $ds$, on aura, comme nous le verrons bientôt (nº 272),

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dx^2},$$

et les formules précédentes deviendront

$$(d) \qquad \cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos 6 = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds}.$$

### PLAN NORMAL.

**269.** Le *plan normal* à la courbe CM est le plan perpendiculaire à la tangente MT, mené par le point M. En nommant X, Y, Z les coordonnées courantes, l'équation de ce plan sera de la forme

$$A(X - x) + B(Y - y) + C(Z - z) = 0.$$

Les équations de la tangente MT étant

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x), \qquad Z - z = \frac{dz}{dx}(X - x),$$

pour que le plan soit perpendiculaire à cette droite, il faut que l'on ait

$$\frac{B}{A} = \frac{dy}{dx}, \quad \frac{C}{A} = \frac{dz}{dx},$$

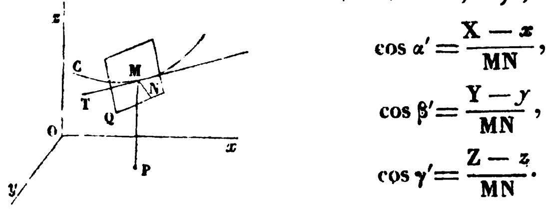
ce qui donne pour l'équation du plan normal

$$(c) \qquad (X - x)\,dx + (Y - y)\,dy + (Z - z)\,dz = 0.$$

**270.** Voici un autre moyen d'obtenir cette équation.

Soit N un point quelconque de ce plan, appelons X, Y, Z ses coordonnées, et $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$, les angles que fait MN avec les axes $Ox$, $Oy$, $Oz$. On a

Fig. 52.




$$\cos\alpha' = \frac{X - x}{MN},$$

$$\cos\beta' = \frac{Y - y}{MN},$$

$$\cos\gamma' = \frac{Z - z}{MN}.$$

Si $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sont les angles que fait la tangente MT avec

les axes, on a [formules $(d)$]

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds},\qquad \cos\beta = \frac{dy}{ds},\qquad \cos\gamma = \frac{dz}{ds}.$$

Or, $\cos \mathrm{TMN} = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma'$.

D'un autre côté, on doit avoir $\cos \mathrm{TMN} = 0$, puisque l'angle TMN est droit; l'équation du plan normal est donc

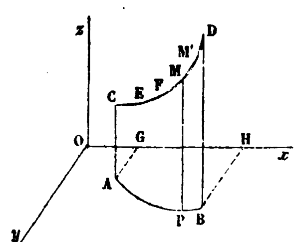
$$\frac{X-x}{MN}\cdot\frac{dx}{ds} + \frac{Y-y}{MN}\cdot\frac{dy}{ds} + \frac{Z-z}{MN}\cdot\frac{dz}{ds} = 0,$$

ou $$(X-x)\,dx + (Y-y)\,dy + (Z-z)\,dz = 0.$$

### DIFFÉRENTIELLE DE L'ARC D'UNE COURBE A DOUBLE COURBURE.

**271.** Prenons, d'une manière arbitraire et en nombre quelconque, des points E, F,..., M, M', etc., sur l'arc de courbe CMD et considérons le polygone gauche CEF... MM'... D, inscrit dans l'arc CMD. Je dis que le périmètre de ce polygone tend vers une limite déterminée quand ses sommets se rapprochent tous indéfiniment les uns des autres, en même temps que leur nombre augmente jusqu'à l'infini; après l'avoir démontré, nous conviendrons de prendre cette limite pour la longueur de l'arc CD.

Fig. 53.




Soient donc $x$, $y$, $z$ les coordonnées de l'un quelconque des sommets M, et $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$ celles du sommet suivant M'; on a

$$MM' = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} = \Delta x\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2}.$$

Donc, si nous désignons par P le périmètre du polygone, on a

$$P = \sum \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2}.$$

Si $\Delta x$ décroît jusqu'à o, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ et $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ tendent vers $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{dz}{dx}$, et l'on peut écrire

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} + \alpha,$$

$\alpha$ étant une fonction qui s'annule avec $\Delta x$. De là il suit que

$$P = \sum \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} + \sum \alpha \Delta x.$$

Mais, d'après un principe démontré (n° 193), on a

$$\lim \sum \alpha \Delta x = 0,$$

donc

$$\lim P = \lim \sum \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}.$$

Supposons maintenant que $x$ soit la variable indépendante; alors $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{dz}{dx}$, et, par suite,

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

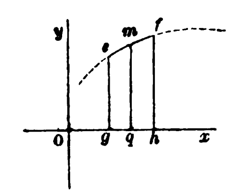
pourront être regardés comme des fonctions de $x$. Sous ce point de vue, considérons, en coordonnées rectangulaires, la courbe *ef* qui a pour équation

$$Y = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}.$$

Soient $Og = a$, $Oa = b$; on aura

$$\sum \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = \sum Y \Delta x.$$

*Fig.* 54.




Or $\sum Y \Delta x$ a pour limite l'aire *efgh* : donc la limite de P et l'aire *efgh* sont exprimées par le même nombre. C'est ce nombre qui représente la longueur de l'arc CD.

**272.** Soit maintenant arc $CM = s$. Si $Oq = x$, on aura numériquement

$$\text{arc CM} = \text{aire } emqg,$$

par conséquent

$$ds = d(\text{aire } emqg) = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2},$$

ou

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

LIMITE DU RAPPORT D'UN ARC A SA CORDE.

**273.** On conclut facilement de là, comme nous l'avons déjà démontré pour les courbes planes, que la *limite du rapport d'un arc à sa corde est l'unité.* En effet, soit l'arc $MM' = \Delta s$, on a

$$\frac{\text{arc MM}'}{\text{MM}'} = \frac{\Delta s}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}} = \frac{\frac{\Delta s}{\Delta x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2}}.$$

Mais le numérateur et le dénominateur du dernier membre ont pour limite commune $\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$ : donc

$$\lim \frac{\text{arc MM}'}{\text{MM}'} = 1.$$

# VINGT-QUATRIÈME LEÇON.

*Des surfaces courbes.* — Équation du plan tangent. — Équations de la normale. — Degré de l'équation du plan tangent. — Problèmes relatifs au plan tangent. — *Suite de la théorie des courbes à double courbure.* — Plan osculateur. — Angles du plan osculateur avec les plans coordonnés. — Normale principale.

## ÉQUATION DU PLAN TANGENT.

**274.** Soit M $(x, y, z)$ un point quelconque d'une surface représentée par l'équation

$$(1) \qquad f(x, y, z) = 0:$$

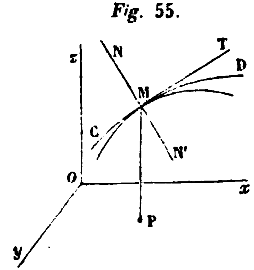
on peut, par ce point, imaginer une infinité de courbes tracées sur la surface. Toutes les tangentes à ces courbes menées par le point M sont contenues dans un même plan, que nous appellerons le plan tangent de la surface, au point M.

En effet, soit

$$(2) \qquad \varphi(x, y, z) = 0$$

l'équation d'une nouvelle surface passant par le point M.

*Fig.* 55.




L'intersection des surfaces (1) et (2) est une courbe CMD, située sur la surface (1) et dont la tangente MT au point M est, d'après ce que nous avons vu dans la leçon précédente, représentée par le système des deux équations

$$(3) \qquad \frac{df}{dx}(X - x) + \frac{df}{dy}(Y - y) + \frac{df}{dz}(Z - z) = 0,$$

$$(4) \qquad \frac{d\varphi}{dx}(X - x) + \frac{d\varphi}{dy}(Y - y) + \frac{d\varphi}{dz}(Z - z) = 0.$$

Or l'équation (3), considérée isolément, représente un plan, qui passera toujours par la tangente, quelle que soit cette tangente, puisque l'équation de ce plan ne dépend nullement de la fonction $\varphi$. Donc toutes les tangentes menées à la surface, par le point M, sont contenues dans le plan (3), qui est le plan tangent à la surface au point M.

### ÉQUATIONS DE LA NORMALE.

**275.** On appelle normale à la surface en M la perpendiculaire menée en ce point au plan tangent. Cette droite, passant par le point M $(x, y, z)$, aura deux équations de la forme

$$X - x = a(Z - z),$$
$$Y - y = b(Z - z).$$

Pour déterminer $a$ et $b$, remarquons que cette droite est perpendiculaire au plan tangent dont l'équation est

$$(a) \qquad \frac{df}{dx}(X - x) + \frac{df}{dy}(Y - y) + \frac{df}{dz}(Z - z) = 0,$$

ce qui exige que l'on ait

$$a = \frac{df}{dx} : \frac{df}{dz}, \quad b = \frac{df}{dy} : \frac{df}{dz}.$$

De là il suit que les équations de la normale sont

$$(b) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{df}{dz}(X - x) &= \frac{df}{dx}(Z - z), \\ \frac{df}{dz}(Y - y) &= \frac{df}{dy}(Z - z), \end{aligned} \right.$$

équations que l'on peut mettre sous la forme

$$(c) \qquad \frac{X - x}{\frac{df}{dx}} = \frac{Y - y}{\frac{df}{dy}} = \frac{Z - z}{\frac{df}{dz}}.$$

**276.** On peut donner à l'équation du plan tangent et à celles de la normale une autre forme. En regardant $z$ comme une fonction de $x$ et de $y$, appelons $p$ et $q$ les dérivées partielles de $z$ par rapport à $x$ et à $y$, c'est-à-dire posons

$$\frac{dz}{dx} = p, \quad \frac{dz}{dy} = q.$$

En différentiant l'équation

$$f(x, y, z) = 0$$

successivement par rapport à $x$, puis par rapport à $y$, on aura

$$\frac{df}{dx} dx + \frac{df}{dz} dz = 0, \qquad \frac{df}{dy} dy + \frac{df}{dz} dz = 0;$$

d'où l'on tire

$$p = -\frac{df}{dx} : \frac{df}{dz}, \quad q = -\frac{df}{dy} : \frac{df}{dz}.$$

Alors, l'équation du plan tangent $(a)$ pourra se mettre sous la forme

$$p(X - x) + q(Y - y) - (Z - z) = 0,$$

ou encore

$$(d) \qquad Z - z = p(X - x) + q(Y - y),$$

et les équations $(b)$, qui représentent la normale, deviendront par la substitution

$$(e) \qquad \begin{cases} X - x + p(Z - z) = 0, \\ Y - y + q(Z - z) = 0. \end{cases}$$

### DEGRÉ DE L'ÉQUATION DU PLAN TANGENT, PAR RAPPORT AUX COORDONNÉES DU POINT DE CONTACT.

**277.** Nous avons vu que le plan tangent a pour équation

$$\frac{df}{dx} X + \frac{df}{dy} Y + \frac{df}{dz} Z = x\frac{df}{dx} + y\frac{df}{dy} + z\frac{df}{dz}.$$

Si l'équation de la surface est algébrique et du degré $m$, les dérivées $\frac{df}{dx}$, $\frac{df}{dy}$, $\frac{df}{dz}$ sont des fonctions algébriques du degré $(m-1)$. Le premier membre sera donc une fonction du degré $(m-1)$ des coordonnées du point de contact. Quant au second membre, il semble être du degré $m$ par rapport à ces coordonnées; mais on peut le réduire au degré $m-1$, en tenant compte de l'équation de la surface.

En effet, soit

$$f(x, y, z) = u + u_1 + u_2 + \ldots,$$

$u$ représentant la somme des termes du degré $m$, $u_1$ celle des termes du degré $m-1$, $u_2$ celle des termes du degré $m-2$, et ainsi de suite : on a

$$\frac{df}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + \ldots,$$

$$\frac{df}{dy} = \frac{du}{dy} + \frac{du_1}{dy} + \frac{du_2}{dy} + \ldots,$$

$$\frac{df}{dz} = \frac{du}{dz} + \frac{du_1}{dz} + \frac{du_2}{dz} + \ldots.$$

En multipliant ces équations respectivement par $x$, $y$ et $z$, et en ajoutant les résultats, on aura

$$x\frac{df}{dx} + y\frac{df}{dy} + z\frac{df}{dz} = \left(x\frac{du}{dx} + y\frac{du}{dy} + z\frac{du}{dz}\right)$$
$$+ \left(x\frac{du_1}{dx} + y\frac{du_1}{dy} + z\frac{du_1}{dz}\right) + \left(x\frac{du_2}{dx} + y\frac{du_2}{dy} + z\frac{du_2}{dz}\right) + \ldots,$$

ou, d'après une propriété des fonctions homogènes (n° 169),

$$x\frac{df}{dx} + y\frac{df}{dy} + z\frac{df}{dz} = mu + (m-1)u_1 + (m-2)u_2 + \ldots$$
$$= m(u + u_1 + u_2 + \ldots) - u_1 - 2u_2 - 3u_3 - \ldots.$$

Mais le point $(x, y, z)$ étant sur la surface, on a

$$u + u_1 + u_2 + \ldots = 0;$$

donc l'équation précédente devient

$$x\frac{df}{dx} + y\frac{df}{dy} + z\frac{df}{dz} = -u_1 - 2u_2 - 3u_3 \ldots .$$

Il en résulte que l'équation du plan tangent se réduit à

$$\frac{df}{dx}X + \frac{df}{dy}Y + \frac{df}{dz}Z + (u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \ldots) = 0,$$

équation qui est du degré $m - 1$ au plus par rapport aux coordonnées du point de contact.

### PROBLÈMES RELATIFS AU PLAN TANGENT.

278. *Mener par un point $(a, b, c)$ un plan tangent à une surface.* On aura pour déterminer les coordonnées $x, y, z$ du point de contact, les deux équations

(1) $$f(x, y, z) = 0,$$

(2) $$a\frac{df}{dx} + b\frac{df}{dy} + c\frac{df}{dz} + u_1 + 2u_2 + \ldots = 0.$$

Comme on a trois inconnues, le problème est indéterminé, ce qu'il était du reste facile de prévoir. L'ensemble des équations (1) et (2) représente le lieu des points de contact. Les droites qui joignent le point $(a, b, c)$ à ces différents points de contact forment un cône circonscrit à la surface, dont on obtiendra l'équation en éliminant $x$, $y$, $z$ entre les équations (1), (2) et les suivantes :

(3) $$\frac{X-a}{x-a} = \frac{Y-b}{y-b} = \frac{Z-c}{z-c},$$

qui représentent l'une quelconque des génératrices.

Si la surface proposée est du deuxième degré, la courbe de contact sera plane, car l'équation (2), qui est satisfaite par les coordonnées des points de contact, est alors du premier degré, et représente un plan.

**279.** *Mener un plan tangent à une surface et parallèle à une droite donnée.* Soient

$$X = aZ, \quad Y = bZ$$

les équations de la droite donnée : il faut que le plan tangent transporté à l'origine, et dont l'équation est alors

$$\frac{df}{dx}X + \frac{df}{dy}Y + \frac{df}{dz}Z = 0,$$

contienne la droite, ce qui entraîne la relation

$$(4) \qquad \frac{df}{dx}a + \frac{df}{dy}b + \frac{df}{dz} = 0.$$

Cette équation représente une surface qui passe par tous les points de contact, et avec l'équation (1), elle constitue la courbe de contact du cylindre circonscrit.

Si l'équation (1) est algébrique et du $m^{ième}$ degré, l'équation (4) sera du $(m-1)^{ième}$ degré. On en conclut que la courbe de contact d'un cylindre circonscrit à une surface du second degré est plane.

On aura, dans tous les cas, l'équation du cylindre circonscrit en éliminant $x$, $y$, $z$ entre les équations (1), (4) et les suivantes :

$$X - x = a(Z - z), \quad Y - y = b(Z - z),$$

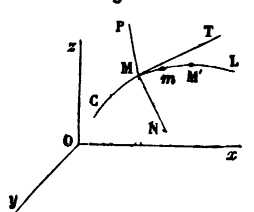
qui représentent une droite parallèle à la direction donnée et passant par un point de la courbe de contact.

### PLAN OSCULATEUR.

**280.** Soit CML une courbe quelconque dans l'espace. Soient M et M′ deux points assez rapprochés sur cette courbe. La tangente MT à la courbe au point M et le point M′ déterminent un plan. On appelle *plan osculateur* ce que ce plan devient à la limite, quand le point M′ vient se confondre avec le point M.

On peut encore dire que le plan osculateur au point M est le plan qui passe par le point M et par les deux points $m$ et M′ voisins du point M sur la courbe, quand ces deux derniers points viennent se confondre avec M. Cette définition s'accorde avec la première, puisque la la ligne M$m$ tend à devenir tangente au point M lorsque les trois points se rapprochent.

Fig. 56.




281. Le plan osculateur de la courbe au point M, dont les coordonnées sont $x$, $y$, $z$, devant passer par ce point aura une équation de la forme

$$(1) \qquad A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0.$$

D'ailleurs les équations de la tangente sont

$$(2) \qquad Y-y=\frac{dy}{dx}(X-x), \quad Z-z=\frac{dz}{dx}(X-x).$$

Comme cette droite doit être tout entière dans le plan osculateur, on doit avoir, quel que soit X ou $(X-x)$,

$$A(X-x)+B\frac{dy}{dx}(X-x)+C\frac{dz}{dx}(X-x)=0$$

ou bien

$$(3) \qquad A\,dx+B\,dy+C\,dz=0.$$

Soient maintenant $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$ les coordonnées du point M′ : en substituant ces coordonnées dans l'équation (1) à la place de X, Y, Z, on aura

$$(4) \qquad A\Delta x+B\Delta y+C\Delta z=0.$$

Or on peut considérer $x$, $y$, $z$ comme étant des fonctions d'une certaine variable indépendante $t$, et si $\alpha$, $6$, $\gamma$ désignent des quantités qui s'évanouissent avec $\Delta t$, on

aura

$$\Delta x = \Delta t \frac{dx}{dt} + \frac{\Delta t^2}{1.2}\left(\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha\right),$$

$$\Delta y = \Delta t \frac{dy}{dt} + \frac{\Delta t^2}{1.2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} + 6\right),$$

$$\Delta z = \Delta t \frac{dz}{dt} + \frac{\Delta t^2}{1.2}\left(\frac{d^2z}{dt^2} + \gamma\right).$$

Par suite l'équation (4) devient

$$\begin{aligned} & A\left[\frac{dx}{dt}\Delta t + \frac{\Delta t^2}{1.2}\left(\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha\right)\right] \\ & + B\left[\frac{dy}{dt}\Delta t + \frac{\Delta t^2}{1.2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} + 6\right)\right] \\ & + C\left[\frac{dz}{dt}\Delta t + \frac{\Delta t^2}{1.2}\left(\frac{d^2z}{dt^2} + \gamma\right)\right] = 0, \end{aligned}$$

ou bien, à cause de l'équation (3), et en divisant les deux membres par $\frac{1}{2}\Delta t^2$,

$$A\left(\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha\right) + B\left(\frac{d^2y}{dt^2} + 6\right) + C\left(\frac{dz^2}{dt^2} + \gamma\right) = 0.$$

A la limite, $\alpha$, $6$, $\gamma$ s'évanouissent, et alors, en multipliant les deux membres par $dt^2$, on a

$$(5) \qquad A d^2x + B d^2y + C d^2z = 0,$$

équation qui, jointe à l'équation (3), servira à déterminer les rapports $\frac{A}{C}$, $\frac{B}{C}$. Eliminant B entre ces deux équations, il vient

$$A(dxd^2y - dyd^2x) + C(dzd^2y - dyd^2z) = 0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{A}{C} = \frac{dyd^2z - dzd^2y}{dxd^2y - dyd^2x}.$$

On aura de même

$$\frac{B}{C} = \frac{dzd^2x - dxd^2z}{dxd^2y - dyd^2x}.$$

L'un des coefficients A, B, C étant arbitraire, je prendrai

$$C = dxd^2y - dy\,d^2x,$$

d'où

$$A = dyd^2z - dzd^2y, \quad B = dzd^2x - dxd^2z,$$

et l'on aura enfin, pour équation du plan osculateur,

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} &(dyd^2z - dzd^2y)(X - x) \\ &+ (dzd^2x - dxd^2z)(Y - y) \\ &+ (dxd^2y - dyd^2x)(Z - z) = 0. \end{aligned} \right.$$

Voici un moyen mnémonique pour retrouver cette équation ; on écrit les fractions

$$\frac{dx}{d^2x}, \quad \frac{dy}{d^2y}, \quad \frac{dz}{d^2z}, \quad \frac{dx}{d^2x},$$

et l'on retranche chacune de ces fractions de la précédente : les numérateurs de ces différences sont respectivement les coefficients de $Z - z$, $Y - y$, $X - x$.

ANGLES DU PLAN OSCULATEUR AVEC LES PLANS COORDONNÉS.

**282.** Soient $\lambda$, $\mu$ et $\nu$ les angles que fait avec les axes OX, OY, OZ, une perpendiculaire MP au plan osculateur, angles qui sont respectivement égaux à ceux que ce dernier plan forme avec les plans $yz$, $xz$ et $xy$. On a

$$(\alpha) \qquad \cos\lambda = \frac{A}{D}, \quad \cos\mu = \frac{B}{D}, \quad \cos\nu = \frac{C}{D},$$

en posant

$$D^2 = A^2 + B^2 + C^2,$$

c'est-à-dire

$$(m)\quad \begin{cases} D^2 = (dyd^2z - dzd^2y)^2 + (dzd^2x - dxd^2z)^2 \\ \quad + (dxd^2y - dyd^2x)^2. \end{cases}$$

**283**. La valeur de $D^2$ peut être mise sous d'autres formes : en effet, posons, pour abréger,

$$dx = a, \quad dy = b, \quad dz = c,$$
$$d^2x = a', \quad d^2d = b', \quad d^2z = c';$$

on aura

$$D^2 = (bc' - cb')^2 + (ca' - ac')^2 + (ab' - ba')^2,$$

ou

$$D^2 = (a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2) - (aa' + bb' + cc')^2.$$

Or, en appelant $ds$ la différentielle de l'arc qui aboutit au point M, on a

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

ce qui donne, en différentiant par rapport à la variable indépendante $t$, et divisant par 2,

$$dsd^2s = dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z = aa' + bb' + cc';$$

il vient donc

$$D^2 = ds^2[(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2]^2,$$

ou enfin

$$(n)\qquad D = ds\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2}.$$

On peut encore écrire

$$D = \sqrt{(dsd^2x - dxd^2s)^2 + (dsd^2y - dyd^2s)^2 + (dsd^2z - dzd^2s)^2},$$

ce qu'on vérifie en développant, ou bien

$$(p)\qquad D = ds^2\sqrt{\left(\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\frac{dy}{ds}}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\frac{dz}{ds}}{ds}\right)^2}.$$

Dans toutes ces expressions la variable indépendante est quelconque.

### NORMALE PRINCIPALE.

284. On appelle normale principale celle qui est située dans le plan osculateur.

Cette droite doit être perpendiculaire à la tangente MT et à la normale MP. Or de l'identité

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1,$$

on déduit

$$(1) \qquad \frac{dx}{ds}\, d\frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds}\, d\frac{dy}{ds} + \frac{dz}{ds}\, d\frac{dz}{ds} = 0.$$

D'autre part, l'équation

$$A\,d^2x + B\,d^2y + C\,d^2z = 0$$

peut s'écrire ainsi :

$$(2) \qquad A\,d\frac{dx}{ds} + B\,d\frac{dy}{ds} + C\,d\frac{dz}{ds} = 0.$$

Les équations (1) et (2) montrent que la droite qui fait avec les axes des angles dont les cosinus sont proportionnels à

$$d\frac{dx}{ds}, \quad d\frac{dy}{ds}, \quad d\frac{dz}{ds},$$

est perpendiculaire à la tangente MT et à la normale MP. C'est donc la droite cherchée.

Il résulte de là que les équations de la normale principale sont

$$(3) \qquad \frac{X - x}{d\frac{dx}{ds}} = \frac{Y - y}{d\frac{dy}{ds}} = \frac{Z - z}{d\frac{dz}{ds}}.$$

---

# VINGT-CINQUIÈME LEÇON.

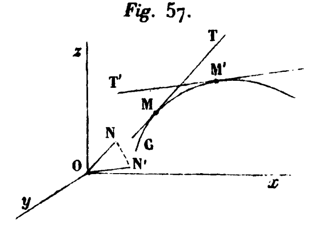
Courbure des lignes dans l'espace. — Cercle osculateur. — Rayon de torsion ou de seconde courbure. — *Application des théories précédentes à l'hélice.* — Équations de l'hélice. — Tangente. — Rayon et centre de courbure. — Lieu des centres de courbure. — Plan osculateur et angle de torsion.

---

COURBURE DES LIGNES DANS L'ESPACE.

**285.** On nomme *angle de contingence*, pour une courbe gauche, comme pour une courbe plane, l'angle $\omega$ que font entre elles les deux tangentes menées aux extrémités d'un arc $MM' = \Delta s$, qui devient infiniment petit, et *courbure au point* M, la limite vers laquelle tend le rapport $\frac{\omega}{\Delta s}$, quand $\Delta s$ diminue indéfiniment. Cette limite est représentée par $\frac{\omega}{ds}$.

*Fig.* 57.




L'inverse de la courbure, ou $\frac{ds}{\omega}$, est dit le *rayon de courbure* au point M. Nous le désignerons par $\rho$.

**286.** Pour évaluer $\omega$ menons par le point O les droites ON et ON' égales à l'unité de longueur et respectivement parallèles aux tangentes MT et M'T'. Soient

$$a = \frac{dx}{ds}, \quad b = \frac{dy}{ds}, \quad c = \frac{dz}{ds}$$

les cosinus des angles que MT ou ON fait avec les axes ou, ce qui revient au même, les coordonnées du point N; soient $a'$, $b'$, $c'$ les coordonnées du point N'. L'angle NON

sera égal à ω, et l'on aura

$$NN' = 2\,ON \sin\frac{1}{2}\omega = \sqrt{(a'-a)^2+(b'-b)^2+(c'-c)^2},$$

ou, puisque ON = 1,

$$2\sin\frac{1}{2}\omega = \sqrt{\Delta a^2+\Delta b^2+\Delta c^2}.$$

En passant à la limite et remplaçant le sinus de l'angle $\frac{1}{2}\omega$ par cet angle lui-même, on aura

$$\omega = \sqrt{da^2+db^2+dc^2},$$

d'où

$$\frac{\omega}{ds} = \frac{1}{\rho} = \sqrt{\frac{da^2}{ds^2}+\frac{db^2}{ds^2}+\frac{dc^2}{ds^2}};$$

on aura donc, en remplaçant $a$, $b$, $c$ par leurs valeurs,

$$\frac{1}{\rho} = \sqrt{\left(\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\frac{dy}{ds}}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\frac{dz}{ds}}{ds}\right)^2},$$

quelle que soit la variable indépendante.

287. A cause de la formule ($p$) du n° 283, on peut écrire

$$\rho = \frac{ds^3}{D}.$$

En prenant deux des formes que l'on a trouvées pour D à l'endroit cité, on a encore

$$\rho = \frac{ds^2}{\sqrt{(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2-(d^2s)^2}},$$

$$\rho = \frac{ds^3}{\sqrt{(dy\,d^2z-dz\,d^2y)^2+(dz\,d^2x-dx\,d^2z)^2+(dx\,d^2y-dy\,d^2x)^2}}.$$

288. La normale principale MN fait avec les axes des

angles $l$, $m$, $n$ dont les cosinus sont proportionnels à

$$\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds},\quad \frac{d\frac{dy}{ds}}{ds},\quad \frac{d\frac{dz}{ds}}{ds};$$

on en conclut

$$\cos l = \rho\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds},\qquad \cos m = \rho\frac{d\frac{dy}{ds}}{ds},\qquad \cos n = \rho\frac{d\frac{dz}{ds}}{ds}.$$

Or les équations de la normale MN sont

$$X - x = R\cos l,\quad Y - y = R\cos m,\quad Z - z = R\cos n,$$

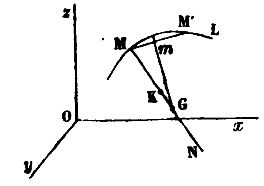
R étant la distance du point M à un point quelconque (X, Y, Z) de cette normale. On pourra donc, en remplaçant $\cos l$, $\cos m$, $\cos n$ par les valeurs que nous venons de trouver, mettre ces équations sous la forme suivante :

$$(a)\quad X - x = R\rho\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds},\quad Y - y = R\rho\frac{d\frac{dy}{ds}}{ds},\quad Z - z = R\rho\frac{d\frac{dz}{ds}}{ds}.$$

CERCLE OSCULATEUR.

**289.** Si par le milieu de la corde MM′ on mène un plan perpendiculaire à cette corde et qui coupe la normale MN au point G, ce point sera le centre d'un cercle passant par les deux points M et M′. Si le point M′ se rapproche du point M, le plan NMM′ tendra à se confondre avec le plan osculateur TMN, et le cercle deviendra à la limite ce qu'on nomme le *cercle osculateur* à la courbe au point M.

*Fig.* 58.




Je dis que le rayon de ce cercle est égal au rayon de courbure $\rho = \frac{ds}{\omega}$.

En effet, l'équation du plan perpendiculaire mené à MM′ par son milieu, est

$$\Delta x\left(X-x-\frac{1}{2}\Delta x\right)+\Delta y\left(Y-y-\frac{1}{2}\Delta y\right)$$
$$+\Delta z\left(Z-z-\frac{1}{2}\Delta z\right)=0,$$

ou

$$(X-x)\Delta x+(Y-y)\Delta y+(Z-z)\Delta z=\frac{1}{2}(\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2).$$

Si l'on élimine $X-x$, $Y-y$, $Z-z$ entre cette équation et celles de la normale $(a)$, on aura

$$R\rho\left(\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds}\Delta x+\frac{d\frac{dy}{ds}}{ds}\Delta y+\frac{d\frac{dz}{ds}}{ds}\Delta z\right)=\frac{1}{2}(\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2);$$

mais si l'on regarde $x$, $y$ et $z$ comme des fonctions de $s$, on a

$$\Delta x=\Delta s\frac{dx}{ds}+\frac{\Delta s^2}{2}\left(\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds}+\alpha\right),$$

$$\Delta y=\Delta s\frac{dy}{ds}+\frac{\Delta s}{2}\left(\frac{d\frac{dy}{ds}}{ds}+6\right),$$

$$\Delta z=\Delta s\frac{dz}{ds}+\frac{\Delta s^2}{2}\left(\frac{d\frac{dz}{ds}}{ds}+\gamma\right),$$

$\alpha$, $6$, $\gamma$ étant des quantités qui s'évanouissent avec $\Delta s$.

Substituant ces valeurs dans l'équation précédente, et supprimant les termes qui contiennent $\Delta s$ en facteur, termes dont la somme est nulle, on aura

$$R\rho\left[\left(\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds}\right)+\left(\frac{d\frac{dy}{ds}}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\frac{dz}{ds}}{ds}\right)^2+\alpha\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds}+\ldots\right]=\frac{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}{\Delta s^2},$$

et en passant à la limite

$$\rho \times \frac{1}{\rho^2} \times \lim \mathrm{R} = 1$$

ou

$$\lim \mathrm{R} = \rho.$$

Ainsi *le rayon du cercle osculateur au point* M *est égal au rayon de courbure en ce point*. C'est pourquoi le point K, limite du point G, sera dit indifféremment le centre de courbure ou le centre du cercle osculateur.

**290.** On prouve d'une manière semblable que l'intersection de la normale MN avec le plan normal à la courbe passant par le point M′ est encore, à la limite, le point K, ou le centre de courbure.

En effet, l'équation de ce plan normal est

$$\left(\frac{dx}{ds} + \Delta\frac{dx}{ds}\right)(\mathrm{X} - x - \Delta x) + \left(\frac{dy}{ds} + \Delta\frac{dy}{ds}\right)(\mathrm{Y} - y - \Delta y)$$
$$+ \left(\frac{dz}{ds} + \Delta\frac{dz}{ds}\right)(\mathrm{Z} - z - \Delta z) = 0.$$

En remplaçant $\mathrm{X} - x$, $\mathrm{Y} - y$, $\mathrm{Z} - z$ par leurs valeurs tirées des équations $(a)$ de la normale principale,

$$(a)\quad \mathrm{X} - x = \mathrm{R}\rho\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds},\quad \mathrm{Y} - y = \mathrm{R}\rho\frac{d\frac{dy}{ds}}{ds},\quad \mathrm{Z} - z = \mathrm{R}\rho\frac{d\frac{dz}{dz}}{dl},$$

on aura

$$\mathrm{R}\rho\left[\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds}\left(\frac{dx}{ds} + \Delta\frac{dx}{ds}\right) + \frac{d\frac{dy}{ds}}{ds}\left(\frac{dy}{ds} + \Delta\frac{dy}{ds}\right) + \frac{d\frac{dz}{ds}}{ds}\left(\frac{dz}{ds} + \Delta\frac{dz}{ds}\right)\right]$$
$$= \Delta x\frac{dx}{ds} + \Delta y\frac{dy}{ds} + \Delta z\frac{dz}{ds} + \Delta x\Delta\frac{dx}{ds} + \Delta y\Delta\frac{dy}{ds} + \Delta z\Delta\frac{dz}{ds}.$$

Cette équation se simplifie beaucoup au moyen des

remarques suivantes. D'abord on a

$$\frac{dx}{ds}d\frac{dx}{ds}+\frac{dy}{ds}d\frac{dy}{ds}+\frac{dz}{ds}d\frac{dz}{ds}=0,$$

et il reste, en divisant par $\Delta s$,

$$\mathrm{R}\rho\left(\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds}\cdot\frac{\Delta\frac{dx}{ds}}{\Delta s}+\frac{d\frac{dy}{ds}}{ds}\cdot\frac{\Delta\frac{dy}{ds}}{\Delta s}+\frac{d\frac{dz}{ds}}{ds}\cdot\frac{\Delta\frac{dz}{ds}}{\Delta s}\right)$$

$$=\frac{\Delta x}{\Delta s}\frac{dx}{ds}+\frac{\Delta y}{\Delta s}\frac{dy}{ds}+\frac{\Delta z}{\Delta s}\frac{dz}{ds}+\frac{\Delta x}{\Delta s}\Delta\frac{dx}{ds}+\frac{\Delta y}{\Delta s}\Delta\frac{dy}{ds}+\frac{\Delta z}{\Delta s}\Delta\frac{dz}{ds}.$$

Si l'on observe que

$$\left(\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\frac{dy}{ds}}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\frac{dz}{ds}}{ds}\right)^2=\frac{1}{\rho^2},$$

la limite du premier membre sera $\frac{1}{\rho}\lim \mathrm{R}$.

D'ailleurs la limite du second membre est

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2 \quad \text{ou} \quad 1.$$

On aura donc

$$\frac{1}{\rho}\lim \mathrm{R}=1 \quad \text{ou} \quad \lim \mathrm{R}=\rho,$$

ce qu'il fallait prouver.

**291.** D'après cela, on peut regarder le centre de courbure au point M comme étant l'intersection du plan osculateur en M, avec les deux plans normaux, menés par le point M et par un point infiniment voisin.

Pour obtenir les coordonnées $\xi$, $\eta$ et $\zeta$ du centre de courbure K, il faudra, dans les équations de la normale

$$\mathrm{X}-x=\mathrm{R}\rho\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds},\quad \mathrm{Y}-y=\mathrm{R}\rho\frac{d\frac{dy}{ds}}{ds},\quad \mathrm{Z}-z=\mathrm{R}\rho\frac{d\frac{dz}{ds}}{ds},$$

remplacer X, Y, Z par $\xi$, $\eta$, $\zeta$. En observant que R devient alors égal à $\rho$, on aura

$$\xi - x = \rho^2 \frac{d\frac{dx}{ds}}{ds}, \quad \eta - y = \rho^2 \frac{d\frac{dy}{ds}}{ds}, \quad \zeta - z = \rho^2 \frac{d\frac{dz}{ds}}{ds},$$

équations qui donneront $\xi$, $\eta$ et $\zeta$ en fonction des coordonnées du point M.

### ANGLE DE TORSION. — RAYON DE SECONDE COURBURE.

**292.** Soient $a$, $b$, $c$, les cosinus des angles que fait avec les axes la perpendiculaire au plan osculateur en M. Si l'on appelle $\Phi$ l'angle de ce plan et du plan osculateur voisin, on aura, comme au n° **286**,

$$2 \sin \frac{1}{2} \Phi = \sqrt{\Delta a^2 + \Delta b^2 + \Delta c^2}.$$

Si l'on passe à la limite, et qu'on appelle $\varphi$ ce que devient $\Phi$, c'est-à-dire l'angle de deux plans osculateurs infiniment voisins, on a

$$\varphi = \sqrt{da^2 + db^2 + dc^2}$$

ou

$$\varphi = \sqrt{(d\cos\lambda)^2 + (d\cos\mu)^2 + (d\cos\nu)^2},$$

$\lambda$, $\mu$ et $\nu$ étant les angles que fait avec les axes OX, OY et OZ la perpendiculaire au plan osculateur de la courbe relatif au point M. On a d'ailleurs

$$\cos\lambda = \frac{dy\,d^2z - dz\,d^2y}{D},$$

$$\cos\mu = \frac{dz\,d^2x - dx\,d^2z}{D},$$

$$\cos\nu = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{D}.$$

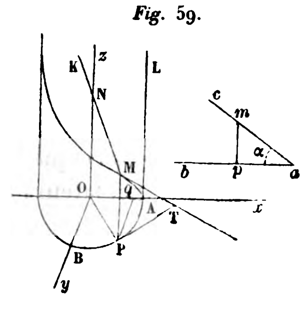
**293.** L'angle infiniment petit $\varphi$, formé par deux plans

osculateurs successifs, se nomme *angle de torsion*, et l'on appelle *seconde courbure* ou *torsion* le rapport de $\varphi$ à $ds$. Si l'on prend $ds$ constant, cette courbure sera proportionnelle à l'angle $\varphi$.

Par analogie avec ce que l'on a fait pour la première courbure, on représente le rapport $\frac{\varphi}{ds}$ par $\frac{1}{r}$, de sorte que $r = \frac{ds}{\varphi}$, et l'on appelle $r$ le *rayon de la deuxième courbure* ou *rayon de torsion*.

### DÉFINITION ET ÉQUATIONS DE L'HÉLICE.

*Fig.* 59.




**294.** Lorsqu'on enroule le plan d'un angle $cab = \alpha$, sur un cylindre droit OABL, à base circulaire, de manière que le côté $ab$ vienne s'appliquer exactement sur la circonférence AB, la courbe suivant laquelle s'enroule le côté $ac$ se nomme une *hélice*.

**295.** Prenons pour axe des $x$ la droite OA qui passe par le point A, origine de l'hélice; pour axe des $y$ une perpendiculaire à O$x$ menée dans le plan de la base par le centre, et enfin pour axe des $z$ l'axe du cylindre.

Soient $x = \text{OQ}$, $y = \text{PQ}$, $z = \text{MP}$ les coordonnées du point M. Nommons $m$ la tangente de l'angle $\alpha$, $u$ l'angle AOP et R le rayon du cylindre. Nous aurons

$$(a) \qquad x = \text{R} \cos u, \quad y = \text{R} \cos u, \quad z = m\text{R}u,$$

car $\quad z = mp = pa \tang \alpha = \text{arc AP} \times \tang \alpha = m\text{R}u.$

En éliminant $u$ entre les équations $(a)$, on aura pour

les équations de l'hélice :

$$x = R\cos\frac{z}{mR}, \quad y = R\sin\frac{z}{mR};$$

mais il vaut mieux conserver les trois équations $(a)$ avec la variable auxiliaire $u$.

### ÉQUATIONS DE LA TANGENTE A L'HÉLICE.

296. Les cosinus des angles que la tangente MT au point $M(x, y, z)$ forme avec les axes, sont $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$. Mais

$$dx = -R\sin u du, \quad dy = R\cos u du, \quad dz = mR du,$$

$$ds = R\sqrt{1+m^2}du;$$

on a donc

$$\frac{dx}{ds} = \frac{-\sin u}{\sqrt{1+m^2}}, \quad \frac{dy}{ds} = \frac{\cos u}{\sqrt{1+m^2}}, \quad \frac{dz}{ds} = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}.$$

La formule $\frac{dz}{ds} = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} = \sin\alpha$ montre que *la tangente* MT *fait avec les génératrices un angle constant égal au complément de* $\alpha$, et, par suite, que l'*angle qu'elle fait avec le plan de la base du cylindre est aussi constant et égal à l'angle* $\alpha$.

On a
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos u}{\sin u} = -\frac{1}{\tang u};$$

Or $\frac{dy}{dx}$ est le coefficient angulaire de la droite PT, et $\tang u$ est celui de la ligne OP. Donc ces deux droites sont perpendiculaires entre elles ; donc la projection de la tangente à l'hélice sur le plan $xy$ est tangente au point P à la base du cylindre.

### RAYON ET CENTRE DE COURBURE.

297. Le rayon de courbure au point M est donné par

la formule

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\frac{dy}{ds}}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\frac{dz}{ds}}{ds}\right)^2}}.$$

Or, des expressions trouvées au numéro précédent, on déduit

$$\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds} = -\frac{\cos u}{R(1+m^2)}, \quad \frac{d\frac{dy}{ds}}{ds} = -\frac{\sin u}{R(1+m^2)}, \quad \frac{d\frac{dz}{ds}}{ds} = 0.$$

Par conséquent

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2 u + \sin^2 u}{R^2(1+m^2)^2}}} = R(1+m^2).$$

Ainsi *le rayon de courbure a la même valeur pour tous les points de l'hélice.*

**298.** La normale principale à l'hélice au point M forme avec les axes des angles dont les cosinus sont proportionnels à $d\frac{dx}{ds}$, $d\frac{dy}{ds}$, $d\frac{dz}{ds}$, ou bien à $\cos u$, $\sin u$ et o. Donc cette droite sera parallèle à OP, et, par suite, le rayon de courbure est dirigé suivant le rayon du cylindre. La droite MN perpendiculaire à l'axe et la tangente MT détermineront le plan osculateur, et si l'on prend $NK = m^2 R$, K sera le centre de courbure de l'hélice pour le point M.

**299.** La droite MN, lorsque le point M se meut sur l'hélice, décrit une surface conoïde appelée *hélicoïde gauche.* Le plan NMT est tangent à cette surface au point M, puisqu'il passe par la génératrice rectiligne MN et par la tangente MT à l'hélice placée sur cette surface. Pour avoir l'équation de cette surface, il suffit d'éliminer

$u$ entre les équations

$$z = mRu, \quad y = x \operatorname{tang} u,$$

qui représentent la droite MN. On obtient ainsi

$$y = x \operatorname{tang} \frac{z}{mR}.$$

Comme d'ailleurs le rayon de courbure a une valeur constante, toujours plus grande que le rayon du cylindre, il en résulte que *le lieu des centres de courbure de l'hélice est une autre hélice du même pas, mais située en sens inverse.*

PLAN OSCULATEUR. — ANGLE ET RAYON DE TORSION.

300. On a

$$dx = - R \sin u du, \quad dy = R \cos u du, \quad dz = mR du,$$
$$d^2x = - R \cos u du^2, \quad d^2y = - R \sin u du^2, \quad d^2z = 0.$$

On aura par suite

$$dx d^2y - dy d^2x = R^2 du^2,$$
$$dz d^2x - dx d^2z = - mR^2 \cos u du^2.$$
$$dy d^2z - dz d^2y = mR^2 \sin u du^2,$$

Alors l'équation du plan osculateur sera, en divisant par le facteur commun $R^2 du^2$,

$$m \sin u (X - x) - m \cos u (Y - y) + Z - z = 0.$$

301. Si l'on appelle $\varphi$ l'angle de torsion, on sait que

$$\varphi = \sqrt{(d \cos\lambda)^2 + (d \cos\mu)^2 + (d \cos\nu)^2},$$

$\lambda$, $\mu$, $\nu$ étant les angles que fait avec les axes la perpendiculaire élevée par le point M au plan osculateur. Or on a

$$\cos\nu = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}, \quad \cos\mu = - \frac{m \cos u}{\sqrt{1+m^2}}, \quad \cos\lambda = \frac{m \sin u}{\sqrt{1+m^2}},$$

d'où résulte

$$d\cos\nu = 0,\quad d\cos\mu = \frac{m\sin u du}{\sqrt{1+m^2}},\quad d\cos\lambda = \frac{m\cos u du}{\sqrt{1+m^2}}.$$

Donc

$$\varphi = \sqrt{\frac{m^2\sin^2 u}{1+m^2} + \frac{m^2\cos^2 u}{1+m^2}}\,du = \frac{m\,du}{\sqrt{1+m^2}};$$

$$\frac{\varphi}{ds} = \frac{m\,du}{\sqrt{1+m^2}} : \mathrm{R}\sqrt{1+m^2}\,du = \frac{m}{1+m^2}\cdot\frac{1}{\mathrm{R}}.$$

Par conséquent la seconde courbure, aussi bien que la première, est partout la même dans l'hélice.

# VINGT-SIXIÈME LEÇON.

*Notions sur les points singuliers des courbes planes.* — **Points d'inflexion. — Points multiples. — Points de rebroussement. — Points isolés. — Points d'arrêt. — Points anguleux.**

---

POINTS SINGULIERS DES COURBES PLANES. — POINTS D'INFLEXION.

**302.** On appelle *points singuliers* d'une courbe des points qui offrent quelque particularité remarquable, indépendante de la position de la courbe par rapport aux axes de coordonnées. Dans ce qui suit, il ne sera question que des courbes planes.

Ayant déjà parlé des points d'inflexion (nº 203), nous allons seulement en donner quelques exemples.

**303.** Soit d'abord la sinusoïde

$$y = \sin x.$$

Pour $x = 0$, et en général pour $x = \pm m\pi$, $m$ étant un nombre entier, on a $y = 0$; par conséquent, la courbe rencontre l'axe des $x$ en une infinité de points que l'on obtiendra en portant sur l'axe des $x$, à partir de l'origine et dans les deux sens, des longueurs égales à la demi-circonférence rectifiée. La courbe se compose d'une infinité de parties identiques, mais situées alternativement au-dessus et au-dessous de l'axe des $x$. Les ordonnées maximums et minimums, égales en valeur absolue, correspondent aux abscisses $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots$

De l'équation de la courbe on tire

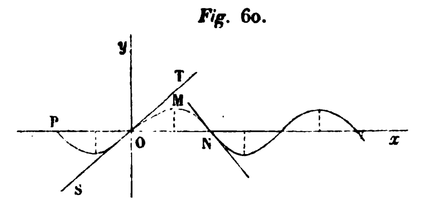


*Fig.* 60.

$$\frac{dy}{dx} = \cos x,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\sin x.$$

La seconde dérivée s'annule et change de signe pour $x = \pm m\pi$. Par conséquent les points O, N,..., où la courbe rencontre l'axe des $x$, sont des points d'inflexion, et comme, pour $x = \pm m\pi$, la première dérivée est égale à $\pm 1$, en ces points la tangente à la courbe est toujours inclinée de 45° ou de 135° sur l'axe des $x$.

**304.** Soit encore la courbe

$$y = \text{tang } x.$$

Pour $x = 0$ et, en général, pour $x = \pm m\pi$, on a $y = 0$. La courbe rencontre donc l'axe des $x$ à l'origine et en une infinité d'autres points équidistants. Pour $x = \frac{\pi}{2}$, $y = \infty$, et si l'on fait $x$ un peu moindre que $\frac{\pi}{2}$, tang $x$ sera très-grande et positive. Si l'abscisse est un peu plus grande que $\frac{\pi}{2}$, tang $x$ sera très-grande, mais négative. La courbe aura donc pour asymptote la droite dont l'équation est $x = \frac{\pi}{2}$. On voit d'ailleurs que la courbe s'étend à l'infini des deux côtés de l'axe des $y$, et se compose d'un nombre illimité de branches identiques.

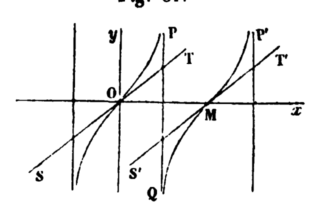


*Fig.* 61.

Par la différentiation, il vient

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2\cos x \sin x}{\cos^4 x} = -\frac{2\sin x}{\cos^3 x},$$

et si l'on pose $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, on trouve que tous les points où la courbe rencontre l'axe des $x$ sont des points d'inflexion.

### POINTS MULTIPLES.

**305.** On appelle *point multiple* un point qui est traversé par plusieurs branches d'une même courbe. Le caractère auquel on reconnaît un pareil point est qu'il admet plusieurs tangentes. Nous omettrons le cas où ces tangentes se réunissent en une seule.

Voici un exemple assez général, où $y$ est une fonction explicite de $x$. Soit

$$y = \varphi(x) \pm (x-a)(x-b)^{\frac{p}{q}},$$

$\frac{p}{q}$ étant une fraction irréductible, dont le dénominateur $q$ est pair : le terme $(x-a)(x-b)^{\frac{p}{q}}$ aura deux valeurs réelles et de signes contraires, pour chacune des valeurs convenables de $x$, ce que nous indiquons en faisant précéder ce terme du signe $\pm$.

On tire de cette équation

$$\frac{dy}{dx} = \varphi'(x) \pm (x-b)^{\frac{p}{q}} \pm \frac{p}{q}(x-a)(x-b)^{\frac{p}{q}-1}.$$

Pour $x = a$, on a

$$y = \varphi(a), \quad \frac{dy}{dx} = \varphi'(a) \pm (a-b)^{\frac{p}{q}}.$$

Si l'on suppose $a > b$, il y aura deux tangentes distinctes : d'ailleurs, à des valeurs de $x$ peu différentes de $a$, correspondent deux valeurs réelles et distinctes de $y$, qui se réduisent à une seule quand $x = a$ : donc le point qui a pour coordonnées $x = a$, $y = \varphi(a)$ est un point double.

Mais si $a$ est $< b$, $\frac{dy}{dx}$ sera imaginaire, et il n'y aura pas de tangente en ce point. En effet, pour des valeurs de $x$ très-peu différentes de $a$, $x - b$ étant négatif, les ordonnées correspondantes seront imaginaires; par suite, il n'existera pas de point de la courbe dans le voisinage du point considéré. Nous reviendrons plus tard sur ce genre de points singuliers (n° 311).

**306.** Supposons maintenant que l'équation de la courbe

$$f(x, y) = 0 \tag{1}$$

ne soit pas résolue par rapport à $y$. On en tire par la différentiation

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dx} = 0. \tag{2}$$

En un point multiple de la courbe, $\frac{dy}{dx}$ doit avoir plusieurs valeurs réelles et distinctes: mais l'équation (2) étant du premier degré par rapport à $\frac{dy}{dx}$, cela ne peut arriver qu'autant qu'on aurait à la fois

$$\frac{df}{dx} = 0, \quad \frac{df}{dy} = 0; \tag{3}$$

donc, pour avoir les points multiples, il faudra commencer par chercher les points dont les coordonnées vérifient les équations (1) et (3).

Comme l'équation (2) se réduit alors à $0 = 0$, elle ne peut servir à déterminer la valeur de $\frac{dy}{dx}$. Il faudra recourir à l'équation différentielle

$$\frac{d^2f}{dx^2} + 2\frac{d^2f}{dx\,dy}\frac{dy}{dx} + \frac{d^2f}{dy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{df}{dy}\frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

ou, puisque $\frac{df}{dy} = 0$,

$$(4) \qquad \frac{d^2 f}{dy^2} + 2\frac{d^2 f}{dx\,dy}\frac{dy}{dx} + \frac{d^2 f}{dy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0.$$

Supposons que les trois coefficients $\frac{d^2 f}{dx^2}$, $\frac{d^2 f}{dx\,dy}$ et $\frac{d^2 f}{dy^2}$ ne soient pas tous nuls, et que l'équation (4) donne deux valeurs réelles et distinctes de $\frac{dy}{dx}$: ces valeurs feront connaître les directions des tangentes au point considéré, et montreront que deux branches de la courbe s'y traversent mutuellement : c'est donc un point double.

Mais si trois branches de la courbe étaient venues se rencontrer en ce point, il devrait y avoir trois tangentes, et comme l'équation (4), qui n'est que du second degré par rapport à $\frac{dy}{dx}$, ne peut donner trois valeurs de cette quantité, il faudrait que l'on eût en même temps

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^2 f}{dx\,dy} = 0, \quad \frac{d^2 f}{dy^2} = 0.$$

Les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ s'obtiendraient ensuite en différentiant l'équation (4). On voit comment il faudrait opérer si un plus grand nombre de branches se rencontraient au point $(x, y)$.

307. Comme exemple, soit la courbe représentée par l'équation

$$y^2 = x^2(1 - x^2), \quad \text{ou bien} \quad y = \pm x\sqrt{1 - x^2}.$$

Cette courbe est symétrique par rapport à l'axe des $x$ et à l'axe des $y$. Elle coupe l'axe des $x$ à l'origine et aux deux points qui ont pour abscisses $x = 1$ et $x = -1$.

En différentiant l'équation de la courbe, on trouve

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{1 - x^2} \mp \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}} = \pm\frac{1 - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Pour $x=0$, les deux valeurs de $y$ se réduisent à une seule qui est o. D'ailleurs, pour ce point, on a

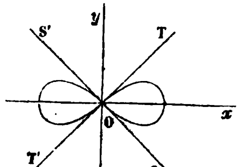


*Fig.* 62.

$$\frac{dy}{dx}=\pm 1.$$

Ainsi l'origine est un point double. En ce point, les tangentes TT' et SS' divisent en deux parties égales les angles des axes.

On trouve pour la dérivée seconde

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\pm\frac{\frac{x(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}-2x\sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)}=\mp\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}};$$

pour $x=0$, on a $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ : ainsi l'origine est à la fois un point double et un point d'inflexion.

POINTS DE REBROUSSEMENT.

308. On appelle point de *rebroussement* un point où deux branches de courbe viennent s'arrêter, et où elles ont une tangente commune. Il faut, dans ce cas, que deux valeurs de $y$, réelles quand $x$ est supérieure ou inférieure à l'abscisse du point, soient imaginaires quand $x$ est inférieure ou supérieure à cette abscisse, et, en outre, que deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$ deviennent égales.

Le rebroussement est dit de première ou de seconde espèce, suivant que les deux branches sont de deux côtés différents (*fig.* 64) ou du même côté de la tangente qui leur est commune (*fig.* 63). D'après ce que nous avons vu sur la convexité des courbes planes (n° 202), l'espèce du rebroussement se reconnaîtra par le signe de $\frac{d^2y}{dx^2}$ sur les deux branches, près du point en question.

309. Ainsi, soit la courbe

$$y = \varphi(x) \pm (x-a)^{\frac{p}{q}} \psi(x),$$

$\varphi(x)$ et $\psi(x)$ étant deux fonctions réelles et finies, pour des valeurs de $x$ voisines de $a$; supposons la fraction $\frac{p}{q}$ positive, irréductible et ayant un dénominateur pair. Alors, pour chaque valeur de $x > a$, le terme $(x-a)^{\frac{p}{q}} \psi(x)$ a deux valeurs réelles égales et de signes contraires, ce que nous indiquons par le double signe $\pm$.

Les deux valeurs de $y$, réelles et inégales, pour $x > a$, deviennent égales pour $x = a$, et imaginaires pour $x < a$. Donc les deux branches de la courbe viennent se réunir et s'arrêter au point qui a pour coordonnées $x = a$, $y = \varphi(a)$.

Reste à voir maintenant si, en ce point, les deux branches en question ont la même tangente. Or l'équation de la courbe donne

$$\frac{dy}{dx} = \varphi'(x) \pm \frac{p}{q}(x-a)^{\frac{p}{q}-1} \psi(x) \pm (x-a)^{\frac{p}{q}} \psi'(x).$$

Si $\frac{p}{q}$ est $> 1$, à la valeur $x = a$ correspondra pour $\frac{dy}{dx}$ la valeur unique $\varphi'(a)$. Donc les deux branches ayant même tangente au point considéré, ce dernier est un point de rebroussement.

Pour s'assurer si le point de rebroussement est de première ou de seconde espèce, on calcule $\frac{d^2y}{dx^2}$, ce qui donne

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \varphi''(x) \pm \frac{p}{q}\left(\frac{p}{q}-1\right)(x-a)^{\frac{p}{q}-2} \psi(x)$$
$$\pm 2\frac{p}{q}(x-a)^{\frac{p}{q}-1} \psi'(x) \pm (x-a)^{\frac{p}{q}} \psi''(x).$$

Nous ferons ici deux hypothèses : 1° si l'on a $\frac{p}{q} - 2 > 0$,

on aura pour $x = a$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \varphi''(a)$. Ainsi, en admettant que $\varphi''(a)$ ne soit pas nulle, $\frac{d^2y}{dx^2}$ a le même signe sur les deux branches, et, par conséquent, la courbe offre un rebroussement de seconde espèce (*fig.* 63).

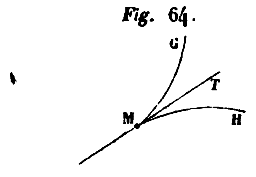
*Fig.* 63.

2°. Si, au contraire, on a $\frac{p}{q} - 2 < 0$, pour une valeur de $x$ très-peu supérieure à $a$, le terme

$$(1) \qquad \frac{p}{q}\left(\frac{p}{q} - 1\right)(x-a)^{\frac{p}{q}-2}\psi(x)$$

sera très-grand en valeur absolue, et il n'en serait pas de même des autres termes de $\frac{d^2y}{dx^2}$ qui tous, excepté le premier, $\varphi''(x)$, convergent vers 0, lorsque $x$ tend vers $a$. Ainsi le terme (1) donne son signe à $\frac{d^2y}{dx^2}$, et comme ce terme a le double signe, il s'ensuit qu'au point $x = a$, $y = \varphi(a)$, les deux branches sont situées de part et d'autre de la tangente commune. Dans ce cas, le rebroussement est de première espèce (*fig.* 64).

*Fig.* 64.

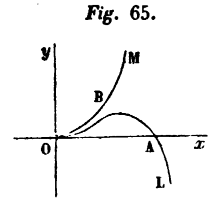



310. Soit comme exemple la courbe

$$y = x^2 \pm x^{\frac{5}{2}},$$

ou
$$y = x^2(1 \pm \sqrt{x}).$$

*Fig.* 65.




A une valeur positive de $x$ correspondent toujours deux valeurs réelles de $y$ qui deviennent égales pour $x = 0$. La courbe n'a aucun point du côté des

abscisses négatives. Du côté des abscisses positives, elle a deux branches qui s'en vont à l'infini, l'une du côté des ordonnées positives, l'autre du côté des ordonnées négatives : celle-ci, après avoir coupé l'axe des $x$ au point dont l'abscisse égale 1.

Le rapport $\frac{y}{x}$ a pour limite zéro quand $x = 0$, et lorsque $x$ a une très-petite valeur positive, les deux valeurs correspondantes de $y$ sont aussi positives. Donc les deux branches ont la même tangente au point O, et sont situées, près de ce point, du même côté de cette tangente. D'où l'on conclut que l'origine est un point de rebroussement de la seconde espèce.

On parvient encore à ce résultat au moyen des valeurs de $\frac{dy}{dx}$ et de $\frac{d^2y}{dx^2}$. On a

$$\frac{dy}{dx} = 2x(1 \pm \sqrt{x}) \pm \frac{x^2}{2\sqrt{x}} = 2x \pm \frac{5}{2}x\sqrt{x},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2 \pm \frac{5}{2}\frac{3x^2}{2x\sqrt{x}} = 2 \pm \frac{15}{4}\sqrt{x}.$$

Pour $x = 0$, on a $\frac{dy}{dx} = 0$ et $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$, d'où résulte encore que le point O est un point de rebroussement de la seconde espèce.

### POINTS ISOLÉS.

**311.** On appelle point *isolé* ou *conjugué* un point dont les coordonnées satisfont à l'équation d'une courbe, sans qu'aucune branche de cette courbe passe par ce point.

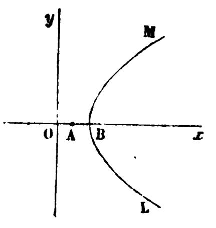
Soit l'équation

$$y = \pm (x - a)\sqrt{x - b},$$

et supposons d'abord $a < b$. Pour $x = b$, on a $y = 0$, ce qui donne un point B situé sur l'axe des abscisses.

Si $x$ croît de $b$ jusqu'à $+\infty$, $y$ croît de o à $\pm\infty$, et l'on a une branche telle que MBL. Si l'on fait $x < b$, $y$ est imaginaire, excepté pour $x = a$, car, pour cette valeur de $x$, on a $y = 0$.

Fig. 66.




Ainsi le point A ($x = a, y = 0$) est un point isolé.

Si l'on a $a > b$, la courbe n'a plus de point isolé, parce que les deux valeurs de $y$ sont réelles quand $x$ est comprise entre $b$ et $a$. Pour $x = a$, les valeurs de $y$ se réduisent toutes deux à o. De $x = a$ à $x = \infty$, $y$ croît jusqu'à l'infini.

Fig. 67.

On voit que, dans ce cas, le point A est traversé par les deux branches BCK, BDL : c'est donc un point double.

POINTS D'ARRÊT.

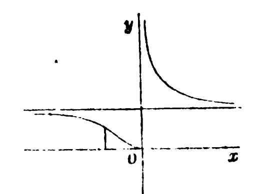
312. On appelle point *d'arrêt* un point où une branche unique d'une courbe vient brusquement s'arrêter.

Considérons la courbe qui a pour équation

$$y = e^{\frac{1}{x}}.$$

Pour $x = 0$, on a $y = \infty$; si l'on fait croître $x$ jusqu'à $+\infty$, $y$ décroît depuis $+\infty$ jusqu'à $+1$, ce qui donne une branche asymptote à l'axe des $y$, et à la droite dont l'équation est $y = 1$.

Fig. 68.

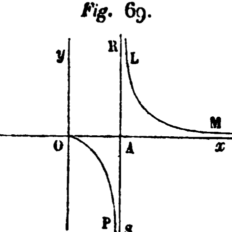



Si maintenant on considère des valeurs négatives de $x$, la

valeur de $y$ sera $\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}$, et pour $x=0$, on aura $y=0$; la courbe passera donc à l'origine. L'ordonnée augmentera ensuite avec la valeur absolue de $x$ jusqu'à la valeur $y=1$. On aura ainsi une seconde branche de courbe asymptote à la droite qui a pour équation $y=+1$, et s'arrêtant brusquement à l'origine en venant des $x$ négatives. L'origine sera donc un point d'arrêt.

313. Soit encore la courbe $y=\frac{1}{\log x}$. On ne peut pas donner à $x$ des valeurs négatives, car alors $\log x$ serait imaginaire. Si l'on donne à $x$ des valeurs positives et très-petites, l'ordonnée sera très-petite et négative, croîtra en valeur absolue avec $x$ jusqu'à $x=1$, et deviendra égale à $-\infty$ pour $x=1$. On aura donc une branche de courbe (*) partant de l'origine, et qui aura pour asymptote du côté des $y$ négatives la droite $x=1$. Si $x$ croît à partir de 1 jusqu'à $\infty$, $y$ devient positive, et cette ordonnée, d'abord très-grande, décroît indéfiniment jusqu'à zéro, ce qui donne la branche de courbe LM. Dans cet exemple, l'origine est un point d'arrêt.

*Fig.* 69.




POINT SAILLANT OU ANGULEUX.

314. Soit la courbe

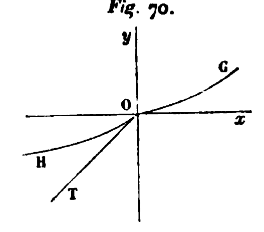
$$y=\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}};$$

(*) C'est par erreur que cette branche a été représentée tangente à l'axe des $x$, tandis qu'elle devrait être tangente à l'axe des $y$.

pour $x=0$, on a $y=0$. L'origine est un point de la courbe. Si maintenant, dans l'expression $\frac{y}{x}=\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$, on fait $x=0$, on a $\lim\frac{y}{x}=0$. Ainsi la branche OG a pour tangente en O l'axe $Ox$.

D'ailleurs, si l'on fait $x=-z$, d'où $\frac{y}{x}=\frac{1}{1+e^{-\frac{1}{z}}}$,

*Fig.* 70.




pour $x=-z=0$, on a

$$\lim\frac{y}{x}=1.$$

Donc la branche OH, située du côté des abscisses négatives, a pour tangente au point O la bissectrice OT de l'angle des axes.

Un pareil point O, où viennent se terminer deux branches de courbe, qui ont chacune en ce point une tangente distincte, est dit un point *anguleux* ou un point *saillant*.

**315.** La recherche des points singuliers exige que l'on examine avec soin la forme de la courbe dans les environs du point pour lequel l'expression analytique de $\frac{dy}{dx}$ présente une des particularités signalées dans cette leçon; car il peut se faire que $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ soit constamment imaginaire près de ce point, et que $\frac{dy}{dx}$ soit réel en ce point. Mais cette discussion, dans le cas où $y$ est une fonction implicite de $x$, nous entraînerait trop loin.

# CALCUL INTÉGRAL.

## VINGT-SEPTIÈME LEÇON.

**Définitions et notations. — Intégration d'une fonction multipliée par une constante. — Intégration immédiate de quelques différentielles simples. — Intégration d'une somme. — Intégration par parties. — Intégration par substitution.**

### DÉFINITIONS ET NOTATIONS.

**316.** Étant donnée une fonction d'une seule variable, on peut toujours la considérer comme la dérivée d'une autre fonction inconnue, qui aura pour différentielle la fonction donnée, multipliée par la différentielle de la variable indépendante.

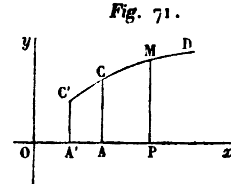
Soit $f(x)$ la fonction donnée; je dis qu'il existe toujours une fonction qui a pour différentielle $f(x)\,dx$.

En effet, construisons la courbe CMD qui, en coordonnées rectangulaires, a pour équation

$$y = f(x).$$

L'aire de cette courbe comprise entre une ordonnée fixe quelconque CA et l'ordonnée MP qui correspond à l'abscisse variable $x$, est une fonction déterminée de $x$. Or la différentielle de cette aire est $y\,dx$ ou $f(x)\,dx$; donc cette aire est une fonction qui a $f(x)\,dx$ pour différentielle, ou $f(x)$ pour dérivée.

*Fig.* 71.




**317.** On appelle *intégrale* de $f(x)\,dx$ et l'on représente par $\int f(x)\,dx$ une fonction dont la différentielle

est $f(x)\ dx$. L'opération par laquelle on passe de la différentielle d'une fonction à cette fonction, se nomme *intégration*.

L'intégration et la différentiation sont deux opérations inverses l'une de l'autre, de telle sorte que le signe $d$ et le signe $\int$ se détruisent mutuellement.

Ainsi on a

$$d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx,\quad \int d\varphi(x) = \varphi(x).$$

318. L'intégrale d'une différentielle donnée $f(x)\,dx$ peut avoir une infinité de valeurs, car si l'on a une fonction $\varphi(x)$ dont $f(x)\,dx$ soit la différentielle, en ajoutant à cette fonction une constante arbitraire, on aura une nouvelle expression $\varphi(x) + \mathrm{C}$ qui aura la même différentielle. Mais il n'y en a pas d'autre, puisque deux fonctions ayant la même différentielle ne peuvent différer que par une *constante*.

Ainsi l'intégrale générale de $f(x)\,dx$ est

$$\varphi(x) + \mathrm{C},$$

C étant une constante arbitraire. La figure rend bien compte de cette constante arbitraire; car si, au lieu de prendre CA pour ordonnée fixe, on prenait C′A′, on aurait l'aire C′A′MP qui surpasse CAMP de l'aire constante C′A′AC.

## INTÉGRATION D'UNE DIFFÉRENTIELLE MULTIPLIÉE PAR UN FACTEUR CONSTANT.

319. On sait qu'un facteur constant $a$ peut être placé en dehors du signe de différentiation; il en est de même pour l'intégration.

En effet, on a

$$dau = adu;$$

or

$$\int dau = au,\quad a\int du = au;$$

donc $\int dau = a\int du$, ou $\int adu = a\int du$,

ou bien, en posant $du = f(x)\,dx$,

$$\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx.$$

## INTÉGRATION IMMÉDIATE DE QUELQUES FONCTIONS SIMPLES.

320. La différentiation des fonctions simples $x^m$, $a^x$, etc., conduit immédiatement à un certain nombre d'intégrales que nous réunissons dans le tableau suivant:

$$d.x^{n+1} = (n+1)\,x^n\,dx,\ldots, \qquad \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,$$

$$de^x = e^x\,dx,\ldots, \qquad \int e^x\,dx = e^x + C,$$

$$da^x = a^x\,\mathrm{l}\,a\,dx,\ldots, \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\mathrm{l}\,a} + C,$$

$$d\,\mathrm{l}\,x = \frac{dx}{x},\ldots, \qquad \int \frac{dx}{x} = \mathrm{l}x + C,$$

$$d\sin x = \cos x\,dx,\ldots, \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C,$$

$$d\cos x = -\sin x\,dx,\ldots, \qquad \int \sin x\,dx = -\cos x + C,$$

$$d\,\mathrm{tang}\,x = \frac{dx}{\cos^2 x},\ldots, \qquad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tang}\,x + C,$$

$$d\cot x = \frac{-dx}{\sin^2 x},\ldots, \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C.$$

Si $x$ est moindre que $\frac{\pi}{2}$,

$$d\,\mathrm{arc}\sin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\ldots, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \mathrm{arc}\sin x + C,$$

$$d\,\mathrm{arc}\cos x = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\ldots, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\mathrm{arc}\cos x + C.$$

On a pour la même intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ deux valeurs qui semblent différentes; mais, comme

$$\text{arc}\cos x + \text{arc}\sin x = \frac{\pi}{2},$$

on voit que les deux intégrales ne diffèrent que par une constante,

$$d\,\text{arc tang}\,x = \frac{dx}{1+x^2},\ldots, \qquad \int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tang}\,x + C.$$

**321.** Dans toutes ces formules, $x$ peut être la variable indépendante ou une fonction quelconque de la variable indépendante. Par exemple, si, dans la formule

$$(1) \qquad \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,$$

on remplace $x$ par $\varphi(x)$, on aura encore

$$\int [\varphi(x)]^n\,d\varphi(x) = \frac{[\varphi(x)]^{n+1}}{n+1} + C.$$

**322.** La formule (1) devient illusoire quand on y fait $n = -1$: elle donne alors

$$\int \frac{dx}{x} = \frac{1}{0} + C.$$

Cela tient à ce que $\int \frac{dx}{x}$ est égale à la transcendante $\mathrm{l}\,x$, qui ne peut pas être représentée par une expression algébrique. Cependant un artifice de calcul permet de déduire de la formule (1) la valeur de $\int \frac{dx}{x}$.

En effet, si, dans cette formule, on retranche du second membre la quantité constante $\frac{1}{n+1}$, ce qui n'en change pas la différentielle, on aura

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}-1}{n+1} + C.$$

Or, si l'on fait $n = -1$, la fraction $\frac{x^{n+1} - 1}{n+1}$ devient $\frac{0}{0}$; pour avoir sa vraie valeur par la méthode connue, il faut prendre la dérivée des deux termes par rapport à $n$, et faire $n = -1$ dans le quotient de ces dérivées, c'est-à-dire dans $\frac{x^{n+1}\,lx}{1}$, ce qui donne $lx$. On a donc

$$\int \frac{dx}{x} = lx + C.$$

INTÉGRATION D'UNE SOMME.

**323.** Nous avons donné, dans le calcul différentiel, des règles pour différentier une somme, un produit de plusieurs fonctions, une fonction de fonction; on en déduit des règles analogues pour le calcul intégral.

Ainsi, de la formule

$$d(u + v - z) = du + dv - dz,$$

on tire, en intégrant les deux membres,

$$\int d(u + v - z) = \int du + \int dv - \int dz,$$

ou

$$\int [f(x) + \varphi(x) - \psi(x)]\,dx$$
$$= \int f(x)\,dx + \int \varphi(x)\,dx - \int \psi(x)\,dx.$$

Donc l'*intégrale d'une somme de fonctions est la somme des intégrales des fonctions qui la composent*.

Par exemple,

$$\int (Ax^m + Bx^n + Cx^p + \ldots)\,dx = \frac{Ax^{m+1}}{m+1} + \frac{Bx^{n+1}}{n+1} + \frac{Cx^{p+1}}{p+1} + \ldots,$$

$$\int (4x^3 - 5x^2 - 3x + 8)\,dx = x^4 - \frac{5}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 8x + C,$$

$$\int \frac{(x^3 - 4x^2 + 5)\,dx}{x} = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 5\,lx + C.$$

### INTÉGRATION PAR PARTIES.

**324.** Nous avons vu que $u$ et $v$ étant deux fonctions quelconques d'une même variable, on avait

$$d.uv = u\,dv + v\,du.$$

Donc en intégrant, on a

$$uv = \int u\,dv + \int v\,du,$$

ou bien

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Cette méthode d'intégration, par laquelle on ramène la recherche d'une intégrale $\int u\,dv$ à celle d'une autre intégrale $\int v\,du$, est fréquemment employée. On l'appelle *intégration par parties*, quoiqu'il fût peut être plus correct de la nommer intégration par facteurs, puisqu'elle est fondée sur la décomposition du produit que l'on veut intégrer en deux facteurs.

EXEMPLES. 1°. $\int x^2 \cos x\,dx.$

On posera

$$\int x^2 \cos x\,dx = \int x^2\,d \sin x = x^2 \sin x - 2\int x \sin x\,dx,$$

$$\int x \sin x\,dx = -\int x\,d \cos x = -x\cos x + \int \cos x\,dx$$

$$= -x\cos x + \sin x + C.$$

On aura donc, en substituant cette valeur dans la première égalité,

$$\int x^2 \cos x\,dx = x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C.$$

2°. $\int x^m e^x\,dx.$

On a

$$\int x^m e^x dx = \int x^m de^x = x^m e^x - m \int x^{m-1} e^x dx.$$

On ramène ainsi l'intégration de $x^m e^x dx$ à celle de $x^{m-1} e^x dx$; on ramènera de même cette dernière à celle de $x^{m-2} e^x dx$, et ainsi de suite; en sorte que, si $m$ est un nombre entier positif, on sera définitivement conduit à chercher $\int e^x dx$, qui est $e^x + C$, et, par une suite de substitutions, on obtiendra l'intégrale demandée.

En prenant $m = 2$, on trouverait

$$\int x^2 e^x dx = e^x (x^2 - 2x + 2) + C.$$

3°. $$\int 1 x dx,$$

$1 x$ étant le logarithme népérien de $x$. On trouve

$$\int 1 x dx = x 1 x - \int x \frac{dx}{x} = x (1 x - 1) + C.$$

INTÉGRATION PAR SUBSTITUTION.

325. Quelquefois une fonction différentielle $f(x)\,dx$, qui n'était pas immédiatement intégrable, le devient par un changement de variable. L'intégration est dite alors *intégration par substitution*.

Ainsi, soit $x = \varphi(t)$: on a $dx = \varphi'(t)\,dt$,

et $$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

EXEMPLES.

1°. $$\int (ax + b)^m dx.$$

On posera

$$ax + b = t, \quad \text{d'où} \quad dx = \frac{dt}{a}.$$

Donc

$$\int (ax+b)^m dx = \frac{1}{a}\int t^m dt = \frac{1}{a}\frac{t^{m+1}}{m+1} + C,$$

ou

$$\int (ax+b)^m dx = \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{m+1}}{m+1} + C.$$

2°. Plus généralement, si l'on avait à trouver

$$\int f(ax+b)\,dx,$$

on poserait $ax+b=t$, d'où $dx=\frac{dt}{a}$,

et alors on serait ramené à $\frac{1}{a}\int f(t)\,dt$.

3°. $$\int \frac{5x^3\,dx}{3x^4+7}.$$

On se fonde ici, pour le choix de $t$, sur ce que le numérateur de la fonction différentielle est égal, à un facteur constant près, à la différentielle du dénominateur. On pose donc

$$3x^4+7=t;\quad \text{d'où}\quad x^3\,dx=\frac{1}{12}dt;$$

donc $$\int \frac{5x^3\,dx}{3x^4+7} = \int \frac{5}{12}\frac{dt}{t} = \frac{5}{12}\,l\,t + C,$$

ou bien $$\int \frac{5x^3\,dx}{3x^4+7} = \frac{5}{12}\,l\,(3x^4+7) + C.$$

4°. $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

Posons

$$\sqrt{a^2+x^2}=t,\quad \text{d'où}\quad a^2+x^2=t^2,\quad x\,dx=t\,dt.$$

Par suite

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \int dt = t + C = \sqrt{a^2+x^2} + C.$$

5°. La même méthode conduit à l'intégrale fréquemment employée

$$\int \frac{dx}{x^2 + px + q},$$

lorsque les deux facteurs du premier degré dans lesquels se décompose $x^2 + px + q$, sont imaginaires, c'est-à-dire quand on a $q - \frac{p^2}{4} > 0$. On a identiquement

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right).$$

Si l'on pose

$$x + \frac{p}{2} = t\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}, \quad \text{d'où } dx = dt\sqrt{q - \frac{p^2}{4}},$$

l'intégrale cherchée devient

$$\frac{1}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}}\int \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{1}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \operatorname{arc\,tang} t,$$

ou bien, en remplaçant $t$ par sa valeur en fonction de $x$,

$$\int \frac{dx}{x^2 + p^2 x + q} = \frac{1}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \operatorname{arc\,tang} \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} + C.$$

Ce résultat peut se mettre sous une autre forme. Nommons $\alpha + 6\sqrt{-1}$ et $\alpha - 6\sqrt{-1}$ les racines imaginaires de l'équation

$$x^2 + px + q = 0.$$

On a, comme on sait,

$$\alpha = -\frac{p}{2}, \quad 6 = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}:$$

donc l'intégrale en question pourra s'écrire

$$\int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \frac{1}{6} \text{arc tang} \frac{x - \alpha}{6} + C.$$

6°. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a - bx^2}};$$

on a

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a - bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{bx^2}{a}}}.$$

Soit maintenant

$$\frac{bx^2}{a} = t^2, \quad \text{d'où} \quad x = t\sqrt{\frac{a}{b}}, \quad dx = \sqrt{\frac{a}{b}}\, dt;$$

par suite on a

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a - bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{\sqrt{\frac{a}{b}}\, dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \text{arc sin}\, t + C,$$

ou enfin

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a - bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \text{arc sin}\, x \sqrt{\frac{b}{a}} + C;$$

---

# VINGT-HUITIÈME LEÇON

*Intégration des fractions rationnelles.* — Cas des racines simples. — Cas particulier des racines simples imaginaires. — Cas des racines multiples. — Cas particulier des racines multiples imaginaires.

## INTÉGRATION DES FRACTIONS RATIONNELLES.

**326.** Soit proposé d'intégrer

$$\frac{F(x)\,dx}{f(x)},$$

$F(x)$ et $f(x)$ étant des fonctions algébriques entières de $x$.

Si le degré de $F(x)$ n'est pas moindre que celui de $f(x)$ par rapport à $x$, on peut diviser $F(x)$ par $f(x)$ jusqu'à ce qu'on parvienne à un reste $\varphi(x)$ d'un degré inférieur à celui de $f(x)$; appelons Q le quotient, on a

$$\frac{F(x)}{f(x)} = Q + \frac{\varphi(x)}{f(x)},$$

d'où $$\int \frac{F(x)\,dx}{f(x)} = \int Q\,dx + \int \frac{\varphi(x)\,dx}{f(x)},$$

et comme on sait obtenir $\int Q\,dx$, on voit que l'intégration demandée est ramenée à celle de $\frac{\varphi(x)\,dx}{f(x)}$, où $\varphi(x)$ est d'un degré inférieur à celui de $f(x)$.

## CAS DES RACINES SIMPLES.

**327.** Nous allons donc nous occuper de chercher

$$\int \frac{\varphi(x)\,dx}{f(x)};$$

soit $m$ le degré de l'équation

$$f(x) = 0,$$

dont nous désignerons les $m$ racines par $a, b, c, \ldots, k$.

Supposons d'abord que ces $m$ racines, réelles ou imaginaires, soient toutes inégales. Cherchons à déterminer, si c'est possible, les coefficients A, B, C,..., K, de manière que l'équation

$$(1) \qquad \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \ldots + \frac{K}{x-k}$$

soit vérifiée identiquement. Il faut pour cela et il suffit que l'on ait, pour toute valeur de $x$,

$$(2) \quad \varphi(x) = A\frac{f(x)}{x-a} + B\frac{f(x)}{x-b} + C + \ldots + K\frac{f(x)}{x-k}.$$

Tous les quotients $\frac{f(x)}{x-a}$, $\frac{f(x)}{x-b}$, etc., sont entiers, et les constantes inconnues A, B, C, etc., sont en nombre égal à $m$; on pourrait donc trouver leurs valeurs en égalant les coefficients des mêmes puissances de $x$ dans les deux membres; mais on peut les trouver par un moyen beaucoup plus simple et qui a l'avantage de faire voir que ces valeurs ne sont ni infinies ni indéterminées.

Faisons $x = a$ dans l'équation (2); puisque les racines $a, b, c, \ldots, k$ sont toutes inégales, $\frac{f(x)}{x-b}$, $\frac{f(x)}{x-c}$, ..., $\frac{f(x)}{x-k}$ deviendront nuls. D'ailleurs $\frac{f(x)}{x-a}$ devient $\frac{0}{0}$ pour $x = a$; mais sa vraie valeur, d'après la règle connue, est $f'(a)$. Donc

$$\varphi(a) = Af'(a), \quad \text{d'où} \quad A = \frac{\varphi(a)}{f'(a)}.$$

Cette valeur de A n'est pas infinie, puisque $a$ étant une racine simple de $f(x)$, $f'(a)$ n'est pas nulle; elle est en outre différente de 0 si l'on admet, ce qui est toujours permis, que la fonction $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ soit irréductible

Ainsi, en donnant aux constantes les valeurs finies et déterminées

$$(d)\qquad A=\frac{\varphi(a)}{f'(a)},\quad B=\frac{\varphi(b)}{f'(b)},\ldots,\quad K=\frac{\varphi(k)}{f'(k)},$$

l'équation (2) est satisfaite pour $x=a$, $x=b$, etc. Il reste à faire voir qu'elle aura lieu pour toute autre valeur de $x$. Or si l'équation (2) n'était pas identique, comme elle est au plus du degré $m-1$ par rapport à $x$, et qu'elle est vérifiée pour les $m$ valeurs $a, b, c,\ldots, k$, elle aurait $m$ racines, ce qui est impossible.

328. On peut encore parvenir de deux autres manières à la valeur de $\frac{f(x)}{x-a}$ pour $x=a$.

1°. On a, d'après la série de Taylor,

$$\frac{f(x)}{x-a}=\frac{f(a)}{x-a}+\frac{f'(a)(x-a)}{x-a}+\frac{f''(a)(x-a)^2}{1.2\,(x-a)},\ldots,$$

et comme $f(x)$ est un polynôme algébrique, entier par rapport à $x$, ce développement est limité; or, puisque $f(a)=0$, il se réduit à

$$\frac{f(x)}{x-a}=f'(a)+\frac{f''(a)}{1.2}(x-a)+\ldots,$$

et, par conséquent, pour $x=a$,

$$\lim\frac{f(x)}{x-a}=f'(a).$$

2°. M étant le coefficient de la plus haute puissance de $x$ dans $f(x)$, on a

$$\frac{f(x)}{x-a}=M(x-b)(x-c)\ldots(x-k),$$

et, par suite, pour $x=a$, il vient

$$\lim\frac{f(x)}{x-a}=M(a-b)(a-c)\ldots(a-k)=f'(a).$$

**329.** La transformation (1) étant ainsi opérée, on a

$$\int \frac{\varphi(x)\,dx}{f(x)} = \int \frac{A\,dx}{x-a} + \int \frac{B\,dx}{x-b} + \ldots,$$

par conséquent

$$(3) \quad \int \frac{\varphi(x)\,dx}{f(x)} = A\,l(x-a) + B\,l(x-b) + \ldots.$$

On se servira de cette formule quand les racines $a$, $b$, $c$,..., $k$ seront toutes réelles, et que les différences $x-a$, $x-b$,..., $x-k$ seront toutes positives : mais si $x-a$, par exemple, était négative, il faudrait changer $A\,l(x-a)$ en $A\,l(a-x)$, ce qui est permis, car on a

$$dl(a-x) = \frac{-dx}{a-x} = \frac{dx}{x-a},$$

$A\,l(x-a)$ représenterait dans ce cas une quantité imaginaire (nº 151).

CAS PARTICULIER DES RACINES SIMPLES IMAGINAIRES.

330. Si quelques-unes des racines de l'équation $f(x)=0$ étaient imaginaires, la transformation (1) serait encore possible, mais le terme correspondant à une racine imaginaire dans la formule (3) se présenterait sous une forme imaginaire. Il faut alors opérer de la manière suivante:

Considérons deux racines imaginaires conjuguées,

$$a = \alpha + 6\sqrt{-1}, \qquad b = \alpha - 6\sqrt{-1};$$

on aura

$$A = \frac{\varphi(a)}{f'(a)} = \frac{\varphi(\alpha + 6\sqrt{-1})}{f'(\alpha + 6\sqrt{-1})} = G + H\sqrt{-1},$$

G et H étant deux fonctions réelles et rationnelles de $\alpha$ et de $6$. En changeant $\sqrt{-1}$ en $-\sqrt{-1}$, on aura

$$B = \frac{\varphi(b)}{f'(b)} = \frac{\varphi(\alpha - 6\sqrt{-1})}{f'(\alpha - 6\sqrt{-1})} = G - H\sqrt{-1};$$

on a donc

$$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}=\frac{G+H\sqrt{-1}}{x-\alpha-\beta\sqrt{-1}}+\frac{G-H\sqrt{-1}}{x-\alpha+\beta\sqrt{-1}}$$

$$=\frac{2G(x-\alpha)-2H\beta}{(x-\alpha)^2+\beta^2},$$

donc

$$\int\left(\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}\right)dx=\int\frac{2G(x-\alpha)\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}-\int\frac{2H\beta\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}.$$

Or

$$\int\frac{2G(x-\alpha)\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}=G\,l[(x-\alpha)^2+\beta^2],$$

$$\int\frac{2H\beta\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}=2H\,\text{arc tang}\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right).$$

On en conclut que, dans ce cas,

$$\int\left(\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}\right)dx$$

$$=G\,l[(x-\alpha)^2+\beta^2]-2H\,\text{arc tang}\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)+C.$$

De cette manière on aura opéré l'intégration de la fraction rationnelle $\frac{\varphi(x)\,dx}{f(x)}$, si toutes les racines de l'équation $f(x)=0$ sont inégales.

331. Exemples.

1°. $$\frac{(3-2x)\,dx}{x^2-x-2},\quad\text{ou}\quad\frac{(3-2x)\,dx}{(x+1)(x-2)}.$$

Posons

$$\frac{3-2x}{x^2-x-2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}.$$

En substituant successivement $-1$ et $+2$ à $x$ dans

$\frac{\varphi(x)}{f'(x)} = \frac{3-2x}{2x-1}$, on a $A = -\frac{5}{3}$, $B = -\frac{1}{3}$. Par conséquent,

$$\frac{(3-2x)\,dx}{x^2-x-2} = -\frac{5}{3}\frac{dx}{x+1} - \frac{1}{3}\frac{dx}{x-2};$$

d'où

$$\int \frac{(3-2x)\,dx}{x^2-x-2} = -\frac{5}{3}\,\mathrm{l}(x+1) - \frac{1}{3}\,\mathrm{l}(x-2) + \mathrm{C}.$$

2°. $$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{1}{a^2-x^2}.$$

Posons $$\frac{1}{a^2-x^2} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+a};$$

on a $$\frac{\varphi(x)}{f'(x)} = -\frac{1}{2x}, \quad A = \frac{-1}{2a}, \quad B = \frac{1}{2a};$$

d'où

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = -\frac{1}{2a}\,\mathrm{l}(x-a) + \frac{1}{2a}\,\mathrm{l}(x+a) + \mathrm{C},$$

ou

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\,\mathrm{l}\left(\frac{x+a}{x-a}\right) + \mathrm{C} = \frac{1}{2a}\,\mathrm{l}\left(c\,\frac{x-a}{x+a}\right).$$

3°. $$\frac{(3x+7)\,dx}{2x^2-3x+5}.$$

Comme l'équation $2x^2-3x+5=0$ n'admet que des racines imaginaires, nous allons opérer l'intégration directe de cette fraction sans la décomposer en la somme de deux fractions.

La dérivée de $2x^2-3x+5$ est $4x-3$ : divisant $3x+7$ par $4x-3$, on aura

$$\frac{3x+7}{4x-3} = \frac{3}{4} + \frac{37}{4(4x-3)},$$

et, par suite,

$$\frac{3x+7}{2x^2-3x+5} = \frac{\frac{3}{4}(4x-3) + \frac{37}{4}}{2x^2-3x+5};$$

d'où

$$\int \frac{(3x+7)\,dx}{2x^2-3x+5} = \frac{3}{4}\int \frac{(4x-3)\,dx}{2x^2-3x+5} + \frac{37}{4}\int \frac{dx}{2x^2-3x+5},$$

ou

$$\int \frac{(3x+7)\,dx}{2x^2-3x+5} = \frac{3}{4}\,\mathrm{l}(2x^2-3x+5) + \frac{37}{4}\int \frac{dx}{2x^2-3x+5}.$$

Or on a

$$\frac{37}{4}\int \frac{dx}{2x^2-3x+5} = \frac{37}{8}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{31}{16}}.$$

Cette dernière intégrale est égale (n° 325, 5°) à

$$\frac{4}{\sqrt{31}}\,\text{arc tang}\,\frac{4x-3}{\sqrt{31}}:$$

on a donc enfin

$$\int \frac{(3x+7)\,dx}{2x^2-3x+5}$$

$$= \frac{3}{4}\,\mathrm{l}(2x^2-3x+5) + \frac{37}{2\sqrt{31}}\,\text{arc tang}\,\frac{4x-3}{\sqrt{31}} + \mathrm{C}.$$

4°. Plus généralement, si l'expression à intégrer est $\frac{(\mathrm{M}x+\mathrm{N})\,dx}{(x-\alpha)^2+6^2}$, on la mettra sous la forme

$$\frac{\mathrm{M}}{2}\,\frac{2(x-\alpha)\,dx}{(x-\alpha)^2+6^2} + (\mathrm{M}\alpha+\mathrm{N})\,\frac{dx}{(x-\alpha)^2+6^2}.$$

Mais (n° 325),

$$\int \frac{2(x-\alpha)\,dx}{(x-\alpha)^2+6^2} = \mathrm{l}\,[(x-\alpha)^2+6^2],$$

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^2+6^2} = \frac{1}{6}\,\text{arc tang}\,\frac{x-\alpha}{6};$$

donc enfin

$$\int \frac{Mx+N}{(x-\alpha)^2+6^2}\,dx$$

$$= \frac{M}{2}\,l\left[(x-\alpha)^2+6^2\right]+\frac{M\alpha+N}{6}\operatorname{arc\,tang}\frac{x-\alpha}{6}+C.$$

CAS DES RACINES MULTIPLES.

**332.** Dans le cas où le dénominateur de $\frac{\varphi(x)\,dx}{f(x)}$ admet des facteurs multiples, c'est-à-dire où l'on a

$$f(x)=M(x-a)^n(x-b)^p(x-c)^q\ldots(x-k),$$

il est impossible de trouver des valeurs de A, B, C,..., K, capables de vérifier l'identité

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\ldots.$$

En effet, si l'on réduit tous les termes du deuxième membre en une seule fraction, le dénominateur de cette fraction ne contiendra $x-a$ qu'à la première puissance, tandis que ce binôme entre à la $n^{ième}$ puissance dans $f(x)$, et que d'ailleurs la fraction $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ est supposée irréductible.

Afin donc de découvrir le mode de décomposition propre à ce cas, supposons d'abord

$$f(x)=(x-a)^n.$$

On a, d'après la série de Taylor,

$$\frac{\varphi(x)}{(x-a)^n}=\frac{\varphi(a)}{(x-a)^n}+\frac{\varphi'(a)}{(x-a)^{n-1}}+\frac{1}{1.2}\frac{\varphi''(a)}{(x-a)^{n-2}}+\ldots$$

$$+\frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\frac{\varphi^{(n-1)}(a)}{x-a}.$$

Ce développement ne s'étend pas plus loin parce que $\varphi(x)$, dans le cas où $f(x) = (x-a)^n$, est au plus du degré $n-1$. Il résulte de là que $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ est décomposable en $n$ fractions ayant chacune pour numérateur une constante, et pour dénominateur une puissance de $x-a$.

Le problème est ainsi ramené à intégrer des fractions de la forme $\frac{dx}{(x-a)^h}$. Cette différentielle pouvant se mettre sous la forme $\frac{d(x-a)}{(x-a)^h}$, on voit que son intégrale est $-\frac{1}{(n-1)(x-a)^{h-1}}$ si $h$ est $> 1$, et $l\,(x-a)$ si $h=1$.

333. Cherchons maintenant à opérer une décomposition analogue à la précédente, dans le cas général, c'est-à-dire quand on a

$$f(x) = M(x-a)^n(x-b)^p(x-c)^q\ldots(x-k) = (x-a)^n f_1(x).$$

Soient $A$, $A_1$, $A_2$, $A_3, \ldots, A_{n-1}$, $n$ coefficients assujettis à vérifier l'identité

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^n} + \frac{A_1}{(x-a)^{n-1}} + \ldots + \frac{A_{n-1}}{x-a} + \frac{\psi(x)}{f_1(x)},$$

$\psi(x)$ étant un polynôme rationnel et entier par rapport à $x$. Si l'on multiplie cette équation par $f(x)$ et que l'on fasse passer dans le premier membre les termes qui contiennent $A$, $A_1$, $A_2, \ldots, A_{n-1}$, on devra avoir, pour toute valeur de $x$,

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} &\varphi(x) - A\frac{f(x)}{(x-a)^n} - A_1\frac{f(x)}{(x-a)^{n-1}} - A_2\frac{f(x)}{(x-a)^{n-2}} - \ldots \\ &\qquad - A_{n-1}\frac{f(x)}{x-a} = (x-a)^n\,\psi(x). \end{aligned} \right.$$

Maintenant en développant $\varphi(x)$ suivant les puissances de $x-a$, on aura

$$\varphi(x) = \varphi(a) + \varphi'(a)(x-a) + \frac{\varphi''(a)}{1.2}(x-a)^2 + \ldots.$$

On obtiendra pour $f(x)$ un développement analogue; mais comme $a$ est une racine multiple de l'ordre $n$, $f(a)$, $f'(a),\ldots, f^{n-1}(a)$ sont nulles, et l'on a simplement

$$f(x) = \frac{f^{(n)}(a)}{1.2\ldots n}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(a)}{1.2.3\ldots(n+1)}(x-a)^{n+1} + \ldots.$$

Substituons ces valeurs de $\varphi(x)$ et de $f(x)$ dans l'équation (1) : en ordonnant par rapport aux puissance de $(x-a)$, le premier membre deviendra

$$\varphi(a) - \mathrm{A}\frac{f^{(n)}(a)}{1.2\ldots n}$$

$$+\left[\varphi'(a) - \mathrm{A}\frac{f^{(n+1)}(a)}{1.2\ldots(n+1)} - \mathrm{A}_1\frac{f^{(n)}(a)}{1.2\ldots n}\right](x-a)$$

$$+\left[\frac{\varphi''(a)}{1.2} - \mathrm{A}\frac{f^{(n+2)}(a)}{1.2\ldots(n+2)} - \mathrm{A}_1\frac{f^{(n+1)}(a)}{1.2\ldots(n+1)} - \mathrm{A}_2\frac{f^{(n)}(a)}{1.2\ldots n}\right](x-a)^2$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\left[\frac{\varphi^{(n)}(a)}{1.2\ldots n} - \mathrm{A}\frac{f^{(2n)}(a)}{1.2\ldots 2n} - \mathrm{A}_1\frac{f^{(2n-1)}(a)}{1.2\ldots(2n+1)}\ldots\right](x-a)^n$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Or, comme le second membre est divisible par $(x-a)^n$, il doit en être de même du premier. Il faudra donc que les coefficients de toutes les puissances de $x-a$, dans le premier membre, jusqu'au coefficient de $(x-a)^{n-1}$, inclusivement, soient nuls.

En égalant à zéro ces coefficients, on aura $n$ équations du premier degré, qui donneront pour $\mathrm{A}$, $\mathrm{A}_1$, $\mathrm{A}_2\ldots$, $\mathrm{A}_{n-1}$ un système unique de valeurs finies et déterminées, car les dénominateurs des valeurs inconnues sont les différentes puissances de $f^n(a)$, et par hypothèse $f^n(a)$ n'est pas nulle.

334. Ayant ainsi mis $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ sous la forme

$$\frac{\mathrm{A}}{(x-a)^n} + \frac{\mathrm{A}_1}{(x-a)^{n-1}} + \ldots + \frac{\mathrm{A}_{n-1}}{x-a} + \frac{\psi(x)}{f_1(x)},$$

on mettra de même $\frac{\psi(x)}{f_1(x)}$ sous la forme

$$\frac{B}{(x-b)^p}+\frac{B_1}{(x-b)^{p-1}}+\ldots+\frac{B_{p-1}}{x-b}+\frac{\chi(x)}{f_2(x)},$$

$f_2(x)$ désignant le quotient de la division de $f_1(x)$ par $(x-b)^p$.

En continuant de la même manière, on finira par obtenir, pour $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$, le développement

$$\begin{aligned}
&\frac{A}{(x-a)^n}+\frac{A_1}{(x-a)^{n-1}}+\ldots+\frac{A_{n-1}}{x-a}\\
&+\frac{B}{(x-b)^p}+\frac{B_1}{(x-b)^{p-1}}+\ldots+\frac{B_{p-1}}{x-b}\\
&+\frac{C}{(x-c)^q}+\frac{C_1}{(x-c)^{q-1}}+\ldots+\frac{C_{q-1}}{x-c}\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+\frac{K}{x-k},
\end{aligned}$$

expression qui, multipliée par $dx$, sera très-facile à intégrer.

La décomposition que nous venons d'effectuer ne peut se faire que d'une seule manière ; car, si les constantes $A_1$, $A_2,\ldots, A_{n-1}$ relatives à la racine $a$, par exemple, étaient susceptibles de plusieurs valeurs, on devrait les trouver en commençant la décomposition par cette racine. Or on n'a trouvé qu'une seule valeur pour chacune de ces constantes. Donc la fraction $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ ne peut se décomposer que d'une seule manière en fractions simples de la forme considérée.

### CAS PARTICULIER DES RACINES IMAGINAIRES MULTIPLES.

335. Si quelques-unes des racines multiples de l'équation $f(x)=0$ étaient imaginaires, le développement

de $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ renfermerait des imaginaires que l'on pourrait faire disparaître en groupant d'une manière convenable les termes relatifs aux racines conjuguées; mais il est plus simple d'opérer de la manière suivante.

Soient $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$ deux racines conjuguées de l'équation $f(x) = 0$, et $n$ leur degré de multiplicité. Posons

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{Ax + B}{[(x-\alpha)^2 + 6^2]^n} + \frac{A_1 x + B_1}{[(x-\alpha)^2 + 6^2]^{n-1}}$$
$$+ \frac{A_2 x + B_2}{[(x-\alpha)^2 + 6^2]^{n-2}} + \ldots + \frac{A_{n-1} x + B_{n-1}}{(x-\alpha)^2 + 6^2} + \frac{\psi(x)}{f_1(x)}.$$

$A$, $B$, $A_1$, $B_1$, etc., sont des constantes qu'il s'agit de déterminer; $\psi(x)$ une fonction rationnelle et entière de $x$, et $f_1(x)$ le quotient de $f(x)$ divisé par $[(x-\alpha)^2 + 6^2]^n$. On doit avoir l'identité

$$\varphi(x) - (Ax + B)f_1(x) - (A_1 x + B_1)[(x-\alpha)^2 + 6^2]f_1(x)$$
$$- (A_2 x + B_2)[(x-\alpha)^2 + 6]^2 f_1(x)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$- (A_{n-1} x + B_{n-1})[(x-\alpha)^2 + 6^2]^{n-1} f_1(x)$$
$$= [(x-\alpha)^2 + 6^2]^n \psi(x).$$

Les constantes $A$, $B$, $A_1$, $B_1$, etc., doivent donc être choisies de telle sorte, que le premier membre de cette équation soit divisible par $[(x-\alpha)^2 + 6^2]^n$ ou, ce qui revient au même, de manière que, pour $x = \alpha + 6\sqrt{-1}$, ce premier membre devienne nul, ainsi que ses $n-1$ premières dérivées. On aura ainsi $n$ équations, dont chacune se partagera en deux, car il faudra égaler à zéro la partie réelle et la partie imaginaire de chaque équation.

Dans la première, tous les termes qui suivent le second contenant $(x-\alpha)^2 + 6^2$ en facteur deviendront nuls pour $x = \alpha + 6\sqrt{-1}$. Cette équation ne contient donc que A

et B, et comme elle se décompose en deux, on pourra ainsi trouver les valeurs de A et B. Quant à la seconde, elle ne contiendra que A, B, $A_1$, $B_1$, et comme A et B sont déjà connus, et que cette équation se sépare en deux, elle donnera les valeurs de $A_1$ et de $B_1$. On obtiendra de la même manière les autres constantes.

Ce calcul fait, on opérera ensuite la décomposition de $\frac{\psi(x)}{f_1(x)}$ en différents termes dont la forme, connue d'après tout ce qui précède, dépendra de la nature des facteurs binômes de $f_1(x)$.

336. Le cas des racines imaginaires multiples conduit donc à intégrer des différentielles de la forme

$$\frac{(Ax+B)\,dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n},$$

$n$ étant un nombre entier et positif. Or on a identiquement

$$\int\frac{(Ax+B)\,dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}=\int\frac{A(x-\alpha)\,dx}{[(x-\alpha)^2+\beta]^n}+\int\frac{(A\alpha+B)\,dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}.$$

Si l'on pose

$$(x-\alpha)^2+\beta^2=t,\quad \text{d'où}\quad 2(x-\alpha)\,dx=dt,$$

on a, lorsque $n$ est $>1$,

$$\int\frac{A(x-\alpha)\,dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}=\int\frac{A\,dt}{2t^n}=-\frac{A}{2(n-1)\,t^{n-1}}$$

$$=-\frac{A}{2(n-1)[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-1}},$$

et, lorsque $n=1$,

$$\int\frac{A(x-\alpha)\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}=A\,l\,[(x-\alpha)^2+\beta^2].$$

Reste donc à déterminer

$$\int\frac{(A\alpha+B)\,dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}.$$

Pour cela, soit $x - \alpha = \beta z$, d'où $dx = \beta dz$; on a

$$\int \frac{(Ax + B)\,dx}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^n} = \frac{A\alpha + B}{\beta^{2n-1}} \int \frac{dz}{(1+z^2)^n},$$

en sorte qu'on est ramené à trouver

$$\int \frac{dz}{(1+z^2)^n};$$

c'est donc cette dernière intégration qui doit maintenant nous occuper.

337. On a identiquement

$$(1) \qquad \int \frac{dz}{(1+z^2)^n} = \int \frac{dz}{(1+z^2)^{n-1}} - \int \frac{z^2\,dz}{(1+z^2)^n}.$$

Mais

$$\int \frac{z^2\,dz}{(1+z^2)^n} = \frac{1}{2} \int z \frac{2z\,dz}{(1+z^2)^n},$$

et

$$\frac{2z\,dz}{(1+z^2)^n} = d\left[-\frac{1}{(n-1)(1+z^2)^{n-1}}\right];$$

par conséquent, en intégrant par parties, on a

$$\int \frac{z^2\,dz}{(1+z^2)^n} = -\frac{z}{(2n-2)(1+z^2)^{n-1}} + \frac{1}{2n-2} \int \frac{dz}{(1+z^2)^{n-1}}.$$

Substituant cette valeur dans (1), il vient, en réduisant,

$$\int \frac{dz}{(1+z^2)^n} = \frac{z}{(2n-2)(1+z^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{dz}{(1+z^2)^{n-1}}.$$

Ainsi la recherche de $\int \frac{dz}{(1+z^2)^n}$ est ramenée à celle de $\int \frac{dz}{(1+z^2)^{n-1}}$; de même cette dernière serait ramenée à celle de $\int \frac{dz}{(1+z^2)^{n-2}}$, et ainsi de suite, et comme $n$ est un nombre entier positif, on sera finalement conduit à la

recherche de $\int \frac{dz}{1+z^2}$ qui est égale à arc tang $x$. L'intégration de $\frac{dz}{(1+z^2)^n}$, et, par suite, celle de $\frac{(A\alpha+B)dx}{[(x-\alpha)^2+6^2]^n}$ se trouvera ainsi effectuée.

338. On peut encore obtenir $\int \frac{dz}{(1+z^2)^n}$ de la manière suivante. Posons

$$t = \text{arc tang } z.$$

On a alors

$$dt = \frac{dz}{1+z^2}, \quad \frac{dz}{(1+z^2)^n} = \frac{dt}{(1+z^2)^{n-1}}:$$

or

$$\frac{1}{1+z^2} = \cos^2 t, \quad \text{d'où} \quad \frac{dz}{(1+z^2)^n} = \cos^{2n-2} t\, dt;$$

par suite

$$\int \frac{dz}{(1+z^2)^n} = \int \cos^{2n-2} t dt.$$

On connaît différentes manières de parvenir à

$$\int \cos^{2n-2} t dt:$$

une des plus simples consiste à développer $\cos^{2n-2} t$ suivant les cosinus des multiples de $t$ [nº 136, formules (1) et (2)]. On obtient ainsi un développement limité, et dont chaque terme, multiplié par $dt$, s'intègre très-facilement.

# VINGT-NEUVIÈME LEÇON.

*Intégration des fonctions irrationnelles.* — **Fonctions qui ne contiennent que des irrationnelles monômes. — Fonctions qui contiennent un radical du second degré. — Intégration des différentielles binômes. — Cas d'intégrabilité. — Formules de réduction.**

---

## FONCTIONS QUI NE CONTIENNENT QUE DES IRRATIONNELLES MONÔMES.

**339.** Une fonction qui ne contient que des monômes irrationnels est toujours intégrable. Ainsi, supposons que l'on veuille obtenir

$$\int \frac{(1 + \sqrt{x} - \sqrt[3]{x^2})\,dx}{1 + \sqrt[3]{x}}.$$

Cette intégrale peut s'écrire

$$\int \frac{\left(1 + x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{2}{3}}\right)dx}{1 + x^{\frac{1}{3}}}.$$

Or, si l'on fait

$$x = t^6, \quad \text{d'où} \quad dx = 6t^5\,dt,$$

on aura la fraction rationnelle

$$\frac{(1 + t^3 - t^4)\,6t^5\,dt}{1 + t^2},$$

ou
$$6\,dt\left(-t^7 + t^6 + t^5 - t^4 + t^2 - 1 + \frac{1}{1 + t^2}\right),$$

dont l'intégrale est égale à

$$-\frac{3}{4}t^8 + \frac{6}{7}t^7 + t^6 - \frac{6}{5}t^5 + 2t^3 - 6t + 6\,\text{arc tang}\,t + C,$$

et il ne reste plus qu'à remplacer $t$ par $\sqrt[6]{x}$.

**340.** On ramène au cas précédent toute fraction qui ne contient que des radicaux portant sur un même binôme du premier degré. Ainsi, soit à chercher

$$\int \frac{\left[x^2 + \sqrt[3]{(ax+b)^2}\right] dx}{x + \sqrt{ax+b}}.$$

On posera $ax + b = t^6$, d'où

$$x = \frac{t^6 - b}{a}, \quad dx = \frac{6\,t^5\,dt}{a}, \quad \sqrt[3]{(ax+b)^2} = t^4;$$

par suite on n'aura plus qu'à intégrer la fraction rationnelle

$$\frac{6}{a^2}\,\frac{t^5\left[(t^6 - b)^2 + a^2 t^4\right] dt}{t^6 - b + at^3}.$$

## FONCTIONS QUI CONTIENNENT UN RADICAL DU SECOND DEGRÉ.

**341.** Nous passons maintenant à l'intégration des fonctions qui contiennent la racine carrée d'un trinôme du deuxième degré tel que $a + bx \pm x^2$ : ce trinôme peut toujours être ramené à cette forme en faisant sortir du radical le coefficient de $x^2$ pris avec le signe $+$.

La méthode que l'on emploie consiste à transformer $x$, $\sqrt{a + bx \pm x^2}$ et $dx$ en fonctions rationnelles d'une nouvelle variable, de manière à ramener le problème à l'intégration d'une fonction rationnelle.

Supposons d'abord que le terme $x^2$, sous le radical, soit précédé du signe $+$. On pourrait indifféremment poser

$$\sqrt{a + bx + x^2} = z \pm x;$$

prenons $z - x$ : en élevant au carré, on aura

$$a + bx = z^2 - 2xz;$$

d'où

(1) $$x = \frac{z^2 - a}{b + 2z},$$

(2) $$\sqrt{a + bx + x^2} = z - x = \frac{a + bz + z^2}{b + 2z},$$

(3) $$dx = \frac{(b + 2z)2z - (z^2 - a)2z}{(b + 2z)^2} = \frac{(a + bz + z^2)\,2\,dz}{(b + 2z)^2}.$$

La substitution des valeurs (1), (2), (3), dans la fonction donnée, la changera en une fonction rationnelle de $z$, qu'il sera dès lors facile d'intégrer.

342. On peut encore, quand $a$ est $> 0$, poser

$$\sqrt{a + bx + x^2} = \sqrt{a} + xz;$$

en élevant au carré et divisant les deux membres par $x$, on aura

$$b + x = 2z\sqrt{a} + xz^2;$$

d'où

(4) $$x = \frac{2z\sqrt{a} - b}{1 - z^2},$$

(5) $$\sqrt{a + bx + x^2} = \frac{z^2\sqrt{a} - bz + \sqrt{a}}{1 - z^2},$$

(6) $$dx = \frac{(z^2\sqrt{a} - bz + \sqrt{a})\,2\,dz}{(1 - z^2)^2}.$$

343. EXEMPLES.

1°. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + x^2}}.$$

Employons la première transformation et posons

$$\sqrt{a + bx + x^2} = z - x.$$

D'après les formules (2) et (3), on aura

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + x^2}} = \int \frac{dz}{\frac{b}{2} + z} = \mathrm{l}\left(\frac{b}{2} + z\right);$$

donc, en remplaçant $z$ par sa valeur $x+\sqrt{a+bx+x^2}$, on aura

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+x^2}} = 1\left(\frac{b}{2}+x+\sqrt{a+bx+x^2}\right)+\text{C}.$$

Quand $b=0$, cette formule devient

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+x^2}} = 1\left(x+\sqrt{a+x^2}\right)+\text{C}.$$

2°. $$\int \frac{(gx+h)\,dx}{\sqrt{a+bx+x^2}}.$$

Il est facile de ramener cette intégrale à la précédente; en effet, on a

$$d\sqrt{a+bx+x^2} = \frac{(b+2x)\,dx}{2\sqrt{a+bx+x^2}} = \frac{\left(\frac{b}{2}+x\right)dx}{\sqrt{a+bx+x^2}}.$$

On voit que si le numérateur de la fonction proposée était $\frac{b}{2}+x$, on pourrait immédiatement intégrer cette fonction. Pour cela nous écrirons

$$\frac{(gx+h)\,dx}{\sqrt{a+bx+x^2}} = \frac{g\left(\frac{b}{2}+x\right)dx}{\sqrt{a+bx+x^2}} + \frac{\left(h-\frac{gb}{2}\right)dx}{\sqrt{a+bx+x^2}};$$

donc

$$\int \frac{(gx+h)\,dx}{\sqrt{a+bx+x^2}} = \int \frac{g\left(\frac{b}{2}+x\right)dx}{\sqrt{a+bx+x^2}} + \left(h-\frac{gb}{2}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+x^2}}$$

$$= g\sqrt{a+bx+x^2} + \left(h-\frac{gb}{2}\right)1\left(\frac{b}{2}+x+\sqrt{a+bx+x^2}\right)+\text{C}.$$

**344.** Occupons-nous maintenant de l'intégration de

$$f\left(x, \sqrt{a+bx-x^2}\right)dx.$$

D'abord, si $a$ est $> 0$, on peut employer la seconde transformation. On posera

$$\sqrt{a+bx-x^2} = \sqrt{a} + xz, \quad \text{d'où} \quad b - x = 2z\sqrt{a} + xz^2;$$

donc

$$(1) \qquad x = \frac{b - 2z\sqrt{a}}{1+z^2},$$

$$(2) \qquad \sqrt{a+bx-x^2} = \frac{\sqrt{a} + bz - z^2\sqrt{a}}{1+z^2},$$

$$(3) \qquad dx = \frac{2(z^2\sqrt{a} - bz - \sqrt{a})\,dz}{(1+z^2)^2}.$$

**345.** Il existe une troisième transformation qui permet d'intégrer

$$f(x, \sqrt{a+bx\pm x^2})\,dx$$

quand les deux racines du trinôme $a + bx \pm x^2$ sont réelles (ce qui comprend le cas où $x^2$ et le terme constant sous le radical ont le signe $-$; car alors les racines doivent être réelles, pour que le trinôme ne soit pas constamment négatif).

Supposons d'abord que le terme $x^2$ sous le radical ait le signe $+$ : soient $\alpha$ et $\beta$ les racines réelles de l'équation

$$a + bx + x^2 = 0,$$

on aura

$$a + bx + x^2 = (x-\alpha)(x-\beta).$$

Posons

$$\sqrt{a+bx+x^2} = (x-\alpha)z \quad \text{ou} \quad a + bx + x^2 = (x-\alpha)^2 z^2,$$

il en résulte

$$(x-\alpha)(x-\beta) = (x-\alpha)^2 z^2, \quad \text{ou} \quad x - \beta = (x-\alpha) z^2;$$

par conséquent, on a

$$(1)\qquad x = \frac{6 - \alpha z^2}{1 - z^2},$$

$$(2)\ \sqrt{a + bx + x^2} = (x - \alpha) z = \left(\frac{6 - \alpha z^2}{1 - z^2} - \alpha\right) z = \frac{(6 - \alpha) z}{1 - z^2},$$

$$(3)\ dx = \frac{-(1 - z^2)\, 2\alpha z\, dz + (6 - dz^2)\, 2 z dz}{(1 - z^2)^2} = \frac{2(6 - \alpha) z dz}{(1 - z^2)^2}.$$

Il faut modifier ces formules, quand le terme $x^2$ est précédé du signe — : on écrit dans ce cas

$$a + bx - x^2 = (x - \alpha)(6 - x).$$

Posons

$$\sqrt{a + bx - x^2} = (x - \alpha) z,$$

d'où

$$6 - x = (x - \alpha) z^2,$$

et, par suite, on a

$$(4)\qquad x = \frac{6 + \alpha z^2}{1 + z^2},$$

$$(5)\qquad \sqrt{a + bx - x^2} = (x - \alpha) z = \frac{(6 - \alpha) z}{1 + z^2},$$

$$(6)\quad dx = \frac{(1 + z^2)\, 2\alpha z dz - (6 + \alpha z^2)\, 2 z dx}{(1 + z^2)^2} = \frac{2(\alpha - 6) z dz}{(1 + z^2)^2}.$$

346. On peut appliquer cette méthode à

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx - x^2}},$$

mais il est plus simple de ramener cette intégrale à

$$\int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}.$$

On a

$$\frac{dx}{\sqrt{a + bx - x^2}} = \frac{dx}{\sqrt{a + \frac{b^2}{4} - \left(x - \frac{b}{2}\right)^2}}.$$

Soit maintenant

$$\frac{b}{2} - x = t\sqrt{a + \frac{b^2}{4}}, \quad \text{d'où} \quad dx = -dt\sqrt{a + \frac{b^2}{4}},$$

on a

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx - x^2}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \operatorname{arc\,cos} \frac{b - 2x}{\sqrt{4a + b^2}} + C.$$

Si $a = 0$,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{bx - x^2}} = \operatorname{arc\,cos} \frac{b - 2x}{b} + C.$$

**347.** Les méthodes précédentes permettent d'intégrer une fonction rationnelle

$$f(x, \sqrt{x + a}, \sqrt{x + b})\,dx,$$

qui contient des radicaux du deuxième degré portant sur deux binômes différents du premier degré.

En effet, posons

$$\sqrt{x + a} = z,$$

d'où

$$x = z^2 - a, \quad \sqrt{x + b} = \sqrt{z^2 - a + b}, \quad dx = 2z\,dz.$$

Par suite, $f(x, \sqrt{x + a}, \sqrt{x + b})\,dx$ devient une certaine fonction $F(z, \sqrt{z^2 - a + b})\,dz$, qu'il est possible d'intégrer d'après les méthodes exposées dans cette leçon.

### INTÉGRATION DES DIFFÉRENTIELLES BINÔMES. — CAS D'INTÉGRABILITÉ.

**348.** On appelle différentielles binômes, celles qui sont de la forme

$$x^m (a + bx^n)^p\,dx.$$

On ne diminue pas la généralité de cette formule, en supposant que $m$ et $n$ soient des nombres entiers; si

l'on avait, par exemple, $x^{\frac{2}{3}}\left(a+bx^{\frac{1}{2}}\right)^p dx$, on ferait $x=z^6$, d'où $dx=6\,z^5\,dz$, et la question serait ramenée à chercher l'intégrale de $6\,z^9\,(a+bz^3)^p\,dz$, différentielle dans laquelle les exposants de $z$, hors de la parenthèse et dans la parenthèse, sont des nombres entiers.

On peut de plus supposer $n>0$, car si l'on veut intégrer $x^m\,(a+bx^{-n})^p\,dx$, il suffit de faire $x=\frac{1}{z}$ pour ramener cette intégration à celle de $z^{-m-2}\,(a+bz^n)^p\,dz$, où l'exposant de la variable, dans la parenthèse, est positif.

Quant à $p$, on doit le supposer fractionnaire. En effet, si $p$ était un nombre entier positif, on aurait, en développant $(a+bx^n)^p$, un polynôme entier, et si $p$ était entier et négatif, on aurait une fraction rationnelle; dans ces deux cas, l'intégrale s'obtiendra par les procédés qui ont été exposés dans les précédentes leçons.

**349.** Pour trouver d'autres cas où la différentielle $x^m\,(a+bx^n)^p\,dx$ puisse être intégrée, posons

$$a+bx^n=z,$$

d'où résulte

$$x=\left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}},\qquad dx=\frac{1}{nb}\left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1}dz.$$

La différentielle devient alors

$$\frac{1}{nb}\,z^p\left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}-1}dz,$$

et l'intégration pourra se faire si

$$(1)\qquad \frac{m+1}{n}=\text{un nombre entier.}$$

En effet, si la fraction $p = \frac{q}{r}$, en faisant $z = t^r$, on sera ramené au cas d'une fonction rationnelle. L'intégration sera donc possible.

On trouve un autre caractère d'intégrabilité, en écrivant la différentielle binôme sous cette forme :

$$x^{m+np}(ax^{-n} + b)^p dx.$$

La condition qui vient d'être trouvée devient pour cette formule, $\frac{m+np+1}{-n}$, ou

$$(2) \qquad \frac{m+1}{n} + p = \text{un nombre entier},$$

condition qui pourra être remplie, quand la première ne le sera pas.

Par exemple, pour la différentielle $x^4(a+bx^3)^{\frac{1}{3}} dx$, on a

$$\frac{4+1}{3} = \frac{5}{3}, \quad \frac{4+1}{3} + \frac{1}{3} = 2,$$

et la deuxième condition d'intégrabilité se trouve seule remplie.

### RÉDUCTION DE L'EXPOSANT DE $x$ HORS DE LA PARENTHÈSE.

350. Comme il n'est pas possible, en général, d'intégrer la différentielle binôme $x^m(a+bx^n)^p dx$, il faut la ramener à d'autres intégrales plus simples ; on y parvient au moyen de l'intégration par parties. On a

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx = \int x^{m-n-1}(a+bx^n)^p x^{n-1} dx = \int u dv,$$

en posant

$$u = x^{m-n-1}, \quad v = \frac{(a+bx^n)^{p+1}}{nb(p+1)};$$

et, par suite,

$$(\alpha)\left\{\begin{aligned}&\int x^m (a+bx^n)^p\,dx\\ &= x^{m-n-1}\frac{(a+bx^n)^{p+1}}{nb(p+1)}-\frac{m-n+1}{nb(p+1)}\int x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}\,dx.\end{aligned}\right.$$

La nouvelle intégrale contenue dans cette formule sera plus simple que la proposée lorsque $m$ sera positif et $>n$, et que $p$ sera négatif, car alors $p+1$ aura une valeur absolue $<p$. Mais on peut trouver une formule dans laquelle l'exposant de $x$ hors de la parenthèse soit seul diminué. En effet, on a identiquement

$$\begin{aligned}&x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1} = x^{m-n}(a+bx^n)^p(a+bx^n)\\ &= ax^{m-n}(a+bx^n)^p + bx^m(a+bx^n)^p.\end{aligned}$$

Par conséquent, en intégrant on aura

$$\int x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}\,dx = a\int x^{m-n}(a+bx^n)^p dx + b\int x^m (a+bx^n)^p\,dx.$$

Substituant cette valeur dans l'équation $(\alpha)$, on aura

$$\begin{aligned}&\int x^m(a+bx^n)^p\,dx\\ &= x^{m-n-1}\frac{(a+bx)^{p+1}}{nb(p+1)}-\frac{m-n+1}{nb(p+1)}\,a\int x^{m-n}(a+bx^n)^p\,dx\\ &-\frac{m-n+1}{nb(p+1)}\,b\int x^m(a+x^n)^p\,dx.\end{aligned}$$

Par suite, en transposant le dernier terme et réduisant,

$$(\mathrm{A})\left\{\begin{aligned}&\int x^m(a+bx^n)^p\,dx\\ &=\frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{b(m+np+1)}-\frac{a(m-n+1)}{b(m+np+1)}\int x^{m-n}(a+bx^n)^p\,dx.\end{aligned}\right.$$

L'intégration de $x^m(a+bx^n)^p\,dx$ est ainsi ramenée à la recherche de

$$\int x^{m-n}(a+bx^n)^p\,dx;$$

on fera dépendre celle-ci de

$$\int x^{m-2n}(a+bx^n)^p\,dx,$$

et ainsi de suite, en sorte que si $m$ est positif et plus grand que $n$, en désignant par $in$ le plus grand multiple de $n$ qui soit inférieur à $m$, on sera ramené, après un nombre $i$ de réductions, à l'intégrale

$$\int x^{m-in}(a+bx^n)^p\,dx.$$

Si l'on avait $m-in=n-1$, cette dernière intégrale pourrait s'obtenir immédiatement, car elle deviendrait

$$\int x^{n-1}(a+bx^n)^p\,dx=\frac{(a+bx^n)^{p+1}}{nb(p+1)}+C.$$

Mais l'égalité $m-in=n-1$ revient à $\frac{m+1}{n}=i+1$, c'est-à-dire que la première condition d'intégrabilité est alors remplie.

Lorsque $np+n+1=0$, le second membre de (A) prend la forme $\infty-\infty$, et cette formule devient illusoire. Mais dans ce cas, comme $\frac{m+1}{n}+p$ est égal à $0$, c'est-à-dire à un nombre entier, on retombe dans le second cas d'intégrabilité, et l'intégrale peut s'obtenir directement.

### RÉDUCTION DE L'EXPOSANT DU BINÔME.

351. Dans la transformation (A) la réduction a porté sur l'exposant de $x$ hors de la parenthèse, tandis que le facteur $(a+bx^n)^p$ ne changeait pas. On peut maintenant au contraire, laissant le facteur $x^m$ invariable, ramener la recherche de l'intégrale proposée à celle d'une intégrale dans laquelle l'exposant de $(a+bx^n)^p$ sera diminué d'un certain nombre d'unités.

En effet, comme

$$x^m (a + bx^n)^p\, dx = (a + bx^n)^p\, d\,\frac{x^{m+1}}{m+1},$$

on aura, en intégrant par parties,

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int x^m (a + bx^n)^p\, dx \\ &= \frac{x^{m+1}(a + bx^n)^p}{m+1} - \frac{pnb}{m+1}\int x^{m+n}(a + bx^n)^{p-1}\, dx. \end{aligned} \right.$$

Par cette formule, l'exposant du binôme $a + bx^n$ a bien été diminué d'une unité, mais l'exposant de $x$ hors de la parenthèse a été augmenté de $n$ unités. Pour réduire ce dernier exposant, on change dans l'équation (A) $m$ en $m + n$, et $p$ en $p - 1$ ; il vient

$$\begin{aligned} &\int x^{m+n}(a + bx^n)^{p-1}\, dx \\ &= \frac{x^{m+1}(a + bx^n)^p}{b(np + m + 1)} - \frac{(m+1)a}{b(np + m + 1)}\int x^m (a + bx^n)^{p-1}\, dx; \end{aligned}$$

par suite, en portant cette valeur dans l'équation (6),

$$\begin{aligned} &\int x^m (a + bx^n)^p\, dx \\ &= \frac{x^{m+1}(a + bx^n)^p}{m+1} - \frac{npx^{m+1}(a + bx^n)^p}{(m+1)(m + np + 1)} \\ &+ \frac{np(m+1)a}{b(np + m + 1)}\int x^m (a + bx^n)^{p-1}\, dx, \end{aligned}$$

et, en réduisant,

$$(B)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int x^m (a + bx^n)^p\, dx \\ &= \frac{x^{m+1}(a + bx^n)^p}{np + m + 1} + \frac{anp}{np + m + 1}\int x^m (a + bn^n)^{p-1}\, dx. \end{aligned} \right.$$

Au moyen de cette formule, on ôtera successivement de $p$ toutes les unités que contient cet exposant.

352. La formule (B) deviendrait illusoire si l'on avait

$$np + m + 1 = 0 ;$$

mais alors on retomberait dans le second cas d'intégrabilité, et l'intégrale cherchée s'obtiendrait directement.

En résumé, l'emploi des formules (A) et (B) fera dépendre l'intégrale $\int x^m (a + bx^n)^p\, dx$, quand $m$ est $> 0$ et $p > 0$, de l'intégrale plus simple

$$\int x^{m-in} (a + bx^n)^{p-k}\, dx,$$

$in$ étant le plus grand multiple de $n$, inférieur à $m$, et $k$ la partie entière de $p$.

Par exemple, on ramènera l'intégrale

$$\int x^7 (a + bx^3)^{\frac{5}{2}}\, dx ;$$

à $\int x (a + bx^3)^{\frac{1}{2}}\, dx$, en la réduisant successivement, par la formule (A), aux suivantes :

$$\int x^4 (a + bx^3)^{\frac{5}{2}}\, dx, \quad \int x (a + bx^3)^{\frac{5}{2}}\, dx,$$

et cette dernière, par la formule (B), aux suivantes :

$$\int x (a + bx^2)^{\frac{3}{2}}\, dx, \qquad \int x (a + bx^3)^{\frac{1}{2}}\, dx.$$

## FORMULES DE RÉDUCTION DANS LE CAS OU LES EXPOSANTS $m$ ET $p$ SONT NÉGATIFS.

353. Quand $m$ et $p$ sont négatifs, les formules (A) et (B) ne réduisent plus la différentielle binôme ; mais on peut en déduire deux nouvelles formules, qui opèrent la réduction dans ce cas. Occupons-nous d'abord de la réduction de l'exposant de $x$, hors de la parenthèse.

Pour cela, tirons de l'équation (A) la valeur de l'intégrale $\int x^{m-n}(a+bx^n)^p\,dx$, ce qui donne

$$\begin{aligned}&\int x^{m-n}(a+bx^n)^p\,dx\\&=\frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{(m-n+1)a}-\frac{b(m+np+1)}{(m-n+1)a}\int x^m(a+bx^n)^p\,dx.\end{aligned}$$

Ensuite changeons $m-n$ en $-m$ ou $m$ en $-m+n$ : nous aurons

$$\text{(C)}\quad\left\{\begin{aligned}&\int x^{-m}(a+bx^n)^p\,dx=\frac{x^{-m+1}(a+bx^n)^{p-1}}{(m-1)a}\\&+\frac{b(np+n-m+1)}{(m-1)a}\int x^{-m+n}(a+bx^n)^p\,dx.\end{aligned}\right.$$

Par l'emploi répété de cette formule, l'intégrale cherchée pourra être ramenée à la suivante :

$$\int x^{-m+(i+1)n}(a+bx^n)^p\,dx,$$

dans laquelle $in$ représente le plus grand multiple de $n$ contenu dans $m$.

Si l'on avait

$$-m+(i+1)n=n-1,$$

la dernière intégrale deviendrait

$$\int x^{n-1}(a+bx^n)^p\,dx=\frac{(a+bx^n)^{p+1}}{nb(p+1)}+\text{C}.$$

Mais comme on a

$$\frac{-m+1}{n}=-i=\text{un nombre entier,}$$

on retombe dans le premier cas d'intégrabilité.

354. Lorsque $p$ est négatif, on tire de la formule (B)

$$\int x^m (a + bx^n)^{p-1} dx$$

$$= -\frac{x^{m+1}(a + bx^n)^p}{anp} + \frac{np + m + 1}{anp} \int x^m (a + bx^n)^p dx.$$

Si l'on change dans ce résultat $p - 1$ en $-p$ ou $p$ en $-p + 1$, on aura

$$(\mathrm{D}) \left\{ \begin{aligned} &\int x^m (a + bx^n)^{-p} dx = \frac{x^{m+1}(a + bx^n)^{-p+1}}{an(p-1)} \\ &- \frac{m + n + 1 - pn}{an(p-1)} \int x^m (a + bx^n)^{-p+1} dx. \end{aligned} \right.$$

On voit que, si $p$ est $> 1$, l'exposant du binôme sera diminué d'une unité en valeur absolue, en continuant la réduction, on finira donc par ramener cet exposant à être compris entre o et 1.

Quand $p = 1$, cette formule devient illusoire, mais ce cas est un de ceux où l'on sait intégrer.

355. Une différentielle de la forme

$$x^q (ax^r + bx^s)^p dx,$$

peut se mettre sous la forme $x^{q+rp}(a + bx^{s-r})^p dx$, et l'on revient ainsi au cas d'une différentielle binôme.

356. Les formules précédentes permettent d'intégrer la différentielle

$$\frac{x^m dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

qui d'ailleurs tombe toujours dans l'un des deux cas d'intégrabilité. La formule (A) donne alors

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{x^{m-1}\sqrt{1 - x^2}}{m} + \frac{m - 1}{m} \int \frac{x^{m-2} dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

En faisant successivement $m = 1, 3, 5, \ldots$, on aura

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2},$$

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^2}{3}\sqrt{1-x^2} + \frac{2}{3}\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^4}{5}\sqrt{1-x^2} + \frac{4}{5}\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

..................................

d'où l'on tire

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2},$$

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\left(\frac{x^2}{3} + \frac{2}{1.3}\right)\sqrt{1-x^2},$$

$$\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\left(\frac{x^4}{5} + \frac{4x^2}{3.5} + \frac{2.4}{1.3.5}\right)\sqrt{1-x^2},$$

et en général, si $m$ est un nombre impair,

$$\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\frac{x^{m-1}}{m} + \frac{(m-1)x^{m-3}}{(m-2)m} + \ldots + \frac{2.4\ldots(m-1)}{1.3\ldots m}\right]\sqrt{1-x^2} + C.$$

Si $m$ était un nombre pair, on arriverait à la formule

$$\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \left[\frac{x^{m-1}}{m} + \frac{(m-1)x^{m-3}}{(m-2)m} + \ldots + \frac{1.3.5\ldots(m-1)}{2.4.6\ldots m}x\right]\sqrt{1-x^2}$$

$$+ \frac{1.3.5\ldots(m-1)}{2.4.6\ldots m}\arcsin x + C.$$

---

# TRENTIÈME LEÇON.

*Intégration des fonctions transcendantes.* — **Fonctions qui se ramènent aux fonctions algébriques. — Intégrale de $z^n P\,dx$. — Intégration de quelques fonctions exponentielles et trigonométriques. — Intégration des produits de sinus ou de cosinus. — Intégration de $\sin^m x \cos^n x\,dx$.**

---

## FONCTIONS QUI SE RAMÈNENT AUX FONCTIONS ALGÉBRIQUES.

**357.** On ramène aux fonctions algébriques, par une simple substitution, les intégrales qui renferment sous le signe $\int$ une fonction algébrique d'une transcendante, multipliée par la différentielle de cette transcendante : telles sont les intégrales

$$\int f(e^x)\,e^x\,dx,\quad \int f(a^x)\,a^x\,dx,\quad \int f(lx)\,\frac{dx}{x},$$

$$\int f(\sin x)\cos x\,dx,\quad \int f(\cos x)\sin x\,dx,$$

$$\int f(\text{arc}\sin x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\quad \int f(\text{arc tang}\,x)\frac{dx}{1+x^2},\ldots$$

Par exemple, si l'on veut obtenir

$$\int (lx)^n\frac{dx}{x},$$

on posera $lx = z$, d'où $\frac{dx}{x} = dz$, et, par suite,

$$\int (lx)^n\frac{dx}{x} = \int z^n\,dz = \frac{z^{n+1}}{n+1} + C,$$

ou

$$\int (lx)^n\frac{dx}{x} = \frac{(lx)^{n+1}}{n+1} + C.$$

INTÉGRALE DE $z^n P dx$.

358. Cherchons maintenant à intégrer une fonction telle que $z^n P dx$, $z$ étant une fonction transcendante de $x$. Posons, à cet effet,

$$\int P dx = Q, \quad \int Q \frac{dz}{dx} dx = R, \quad \int R \frac{dz}{dx} dx = S, \ldots :$$

on a, en intégrant par parties,

$$\int z^n P dx = \int z^n dQ = Q z^n - n \int z^{n-1} Q dz,$$

$$\int z^{n-1} Q dz = \int z^{n-1} dR = R z^{n-1} - (n-1) \int z^{n-2} R dz,$$

$$\int z^{n-2} R dz = \int z^{n-2} dS = S z^{n-2} - (n-2) \int z^{n-3} S dz \ldots ;$$

par conséquent, on a

$$\text{(A)} \quad \int z^n P dx = Q z^n - n R z^{n-1} + n(n-1) S z^{n-2} \ldots$$

La loi de ce développement est évidente. On voit que si $n$ est un nombre entier positif, et si l'on sait obtenir les intégrales désignées par Q, R, S, etc., on aura ainsi l'intégrale cherchée $\int z^n P dx$.

359. Exemples.

1°. $$\int x^{m-1} (l\, x)^n dx :$$

on a $$P = x^{m-1}, \quad z = lx, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x},$$

par conséquent

$$Q = \frac{x^m}{m}, \quad R = \frac{x^m}{m^2}, \quad S = \frac{x^m}{m^3}, \ldots ;$$

donc

$$\int x^{m-1}(\mathrm{l}x)^n dx = \frac{x^m}{m}\left[\begin{array}{c}(\mathrm{l}x)^n - \frac{n}{m}(\mathrm{l}x)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{m^2}(\mathrm{l}x)^{n-2} - \ldots \\ \pm \frac{n(n-1)\ldots 3.2.1}{m^n}\end{array}\right] + \mathrm{C}.$$

Si, dans cette formule, on pose $\mathrm{l}x = z$, on aura

$$\int z^n e^{mz} dz = \frac{e^{mz}}{m}\left[z^n - \frac{n}{m}z^{n-1} + \frac{n(n-1)}{m^2}z^{n-2} - \ldots\right] + \mathrm{C}.$$

2°. $$\int (\operatorname{arc}\sin x)^n dx.$$

Il faudra faire ici

$$z = \operatorname{arc}\sin x, \quad \mathrm{P} = 1.$$

On aura alors

$$\mathrm{Q} = \int \mathrm{P}\, dx = x,$$

$$\mathrm{R} = \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2},$$

$$\mathrm{S} = \int -\sqrt{1-x^2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -x,$$

$$\mathrm{T} = \int \frac{-x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1-x^2},$$

$$\mathrm{U} = \int dx = x,$$

et ainsi de suite; la substitution de ces valeurs dans la formule (A) donnera, en groupant convenablement les termes,

$$\int (\operatorname{arc}\sin x)^n dx$$

$$= x[z^n - n(n-1)z^{n-2} + n(n-1)(n-2)(n-3)z^{n-4}\ldots]$$

$$+ \sqrt{1-x^2}[nz^{n-1} - n(n-1)(n-2)z^{n-3}\ldots].$$

Lorsque $n$ est un nombre entier positif, ces deux séries se termineront d'elles-mêmes.

Si l'on pose arc $\sin x = z$, on aura

$$\sqrt{1-x^2} = \cos z, \qquad dx = \cos z dz,$$

et la formule précédente deviendra

$$\int z^n \cos z dz$$

$$= \sin z [z^n - n(n-1) z^{n-2} + n(n-1)(n-2(n-3) z^{n-4} \ldots]$$
$$+ \cos z [n z^{n-1} - n(n-1)(n-2) z^{n-3} \ldots].$$

Cette dernière formule est d'ailleurs une conséquence d'une autre plus générale. On a, en intégrant par parties,

$$\int f(x) \cos x dx = f(x) \sin x - \int f'(x) \sin x dx,$$

$$\int f'(x) \sin x dx = -f'(x) \cos x + \int f''(x) \cos x dx,$$

$$\int f''(x) \cos x dx = f''(x) \sin x - \int f'''(x) \sin x dx,$$

et ainsi de suite; par conséquent

$$\int f(x) \cos x dx = [f(x) - f''(x) + f^{\text{iv}}(x) \ldots] \sin x$$
$$+ [f'(x) - f'''(x) + f^{\text{v}}(x) \ldots] \cos x,$$

et l'intégrale pourra toujours être obtenue si $f(x)$ est une fonction algébrique et entière.

360. Quand $n$ est un nombre négatif ou fractionnaire, le développement (A) renferme un nombre infini de termes; il faut alors recourir à des artifices pour avoir l'intégrale.

EXEMPLES. 1°. $\displaystyle\int \frac{e^z dz}{z^n}$,

$n$ étant un nombre entier positif: on a, en intégrant par parties,

$$\int \frac{e^z dx}{z^n} = -\frac{e^z}{(n-1) z^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \int e^z \frac{dz}{z^{n-1}}.$$

Au moyen de cette formule, on fera dépendre l'intégrale cherchée de la suivante :

$$\int \frac{e^z\,dz}{z},$$

qu'on n'a encore pu obtenir qu'au moyen d'une série d'un nombre infini de termes.

La même formule, dans laquelle on posera $z = \mathrm{l}x$, servira à ramener $\int \frac{dx}{(\mathrm{l}x)^n}$ à $\int \frac{dx}{\mathrm{l}x}$.

2°. $$\int \frac{e^x\,x\,dx}{(1+x)^2}:$$

posons

$$1 + x = z, \quad \text{d'où} \quad x = z - 1;$$

l'intégrale proposée devient alors

$$\int \frac{e^{z-1}(z-1)}{z^2}\,dz = \int \frac{e^{z-1}}{z}\,dz - \int \frac{e^{z-1}\,dz}{z^2}$$
$$= \frac{1}{e}\left(\int e^z \frac{dz}{z} - \int e^z \frac{dz}{z^2}\right).$$

En intégrant par parties, on aura

$$\int \frac{1}{z} e^z\,dz = \int \frac{1}{z}\,d(e^z) = \frac{e^z}{z} + \int e^z\,d\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{e^z}{z} + \int e^z \frac{dz}{z^2}\ldots,$$

et, par suite,

$$\int \frac{e^x\,x\,dx}{(1+x)^2} = \frac{1}{e}\cdot\frac{e^z}{z} = \frac{e^{z-1}}{z} = \frac{e^x}{1+x}.$$

## INTÉGRATION DE QUELQUES FONCTIONS EXPONENTIELLES ET TRIGONOMÉTRIQUES.

361. Les intégrales $\int e^{ax}\cos bx\,dx$ et $\int e^{ax}\sin bx\,dx$ peuvent être déterminées à la fois au moyen de l'inté-

gration par parties. On a, en observant que $e^{ax} = d\,\frac{e^{ax}}{a}$,

$$(1)\qquad \int e^{ax}\cos bx\,dx = \cos bx\,\frac{e^{ax}}{a} + \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx\,dx,$$

$$(2)\qquad \int e^{ax}\sin bx\,dx = \sin bx\,\frac{e^{ax}}{a} - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx\,dx.$$

De ces deux équations on tire

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{a^2+b^2} + \mathrm{C},$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2} + \mathrm{C}.$$

362. On peut encore déduire ce résultat de la formule

$$\int e^{(a+b\sqrt{-1})x}\,dx = \frac{e^{(a+b\sqrt{-1})x}}{a+b\sqrt{-1}},$$

en remplaçant les exponentielles imaginaires par leurs expressions trigonométriques et en séparant ensuite dans les deux membres les parties réelles et les parties imaginaires.

Plus généralement, pour obtenir

$$\int z^n e^{az}\cos bz\,dz \quad \text{et} \quad \int z^n e^{az}\sin bz\,dz,$$

il suffit de remplacer, dans la seconde formule de la page 328, $m$ par $a+b\sqrt{-1}$, et d'égaler séparément les parties réelles et les parties imaginaires des deux membres.

363. On intègre

$$f(\sin x,\ \cos x)\,dx;$$

$f$ désignant une fonction rationnelle, en posant

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}x = z.$$

Il en résulte

$$\sin x = 2 \sin \frac{1}{2} x \cos \frac{1}{2} x = \frac{2z}{1+z^2},$$

$$\cos x = \cos^2 x - \sin^2 \frac{1}{2} x = \frac{1-z^2}{1+z^2},$$

$$dx = \frac{2dz}{1+z^2},$$

d'où $f(\sin x, \cos x)\, dx = f\left(\frac{2z}{1+z^2}, \frac{1-z^2}{1+z^2}\right) \frac{2dz}{1+z^2},$

fonction rationnelle par rapport à $z$.

**364.** Voici quelques fonctions trigonométriques qui se présentent souvent dans les calculs et dont l'intégration s'obtient avec facilité.

1°. $$\int \sin x \cos x dx = \int \sin x d \sin x = \frac{\sin^2 x}{2} + C.$$

On peut aussi écrire

$$\int \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \int \sin 2x dx = \frac{1}{4} \int \sin 2x d(2x).$$

Donc

$$\int \sin x \cos x dx = -\frac{1}{4} \cos 2x + C.$$

Il est aisé de s'assurer que ces deux expressions de la même intégrale ne diffèrent que par une constante.

2°. $$\int \operatorname{tang} x dx = -\int \frac{d \cos x}{\cos x} = -1 \cos x + C,$$

ou

$$\int \operatorname{tang} x dx = 1 \frac{1}{\cos x} + C.$$

3°. $$\int \cot x dx = \int \frac{d \sin x}{\sin x} = 1 \sin x + C.$$

4°. $$\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \int \frac{d \operatorname{tang} x}{\operatorname{tang} x} = \operatorname{l} \operatorname{tang} x + C.$$

5°. $$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{d\left(\frac{1}{2}x\right)}{\sin\frac{1}{2}x \cos\frac{1}{2}x} = \operatorname{l} \operatorname{tang} \frac{1}{2}x + C.$$

6°. $$\int \frac{dx}{\cos x} = -\operatorname{l} \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}x\right) + C.$$

Cette intégrale se déduit de la précédente en remplaçant $x$ par $\frac{\pi}{2} - x$.

7°. $$\int dx \sqrt{1 + \cos x} = \int 2 d\left(\frac{1}{2}x\right) \sqrt{2} \sin \frac{1}{2}x$$

$$= -2\sqrt{2} \cos \frac{1}{2}x + C.$$

On trouvera de la même manière

$$\int dx \sqrt{1 - \cos x} = 2\sqrt{2} \sin \frac{1}{2}x + C.$$

8°. $$\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x}.$$

On pourrait ici employer la méthode générale (n° 363); mais il vaut mieux écrire

$$\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \int \frac{dx}{\frac{a \sin x}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b \cos x}{\sqrt{a^2 + b^2}}}.$$

Si l'on pose $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos k$, d'où $\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin k$, on aura

$$\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \int \frac{dx}{\sin(x + k)},$$

ou bien

$$\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \operatorname{l} \operatorname{tang} \frac{x+k}{2} + C.$$

9°. $$\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x + c},$$

il faut employer, dans ce cas, la méthode générale (n° 363), et poser $\operatorname{tang}\frac{1}{2}x = z$ : on est alors conduit à intégrer la fraction rationnelle

$$\frac{2\,dz}{2az + b(1-z^2) + c(1+z^2)},$$

ce qui donne, suivant les cas,

$$\frac{2}{\sqrt{c^2-b^2-a^2}} \operatorname{arc\,tang} \frac{(c-b)\operatorname{tang}\frac{1}{2}x + a}{\sqrt{c^2-b^2-a^2}},$$

ou

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2-c^2}} \operatorname{l} \frac{(c-b)\operatorname{tang}\frac{1}{2}x + a - \sqrt{a^2+b^2-c^2}}{(c-b)\operatorname{tang}\frac{1}{2}x + a + \sqrt{a^2+b^2-c^2}} + C.$$

### INTÉGRATION DES PRODUITS DE SINUS ET DE COSINUS.

365. Soit proposé de trouver

$$\int \sin(ax+b)\sin(a'x+b')\,dx.$$

On a, d'après une formule connue,

$$\sin(ax+b)\sin(a'x+b')$$
$$= \frac{\cos[(a-a')x+b-b']}{2} + \frac{\cos[(a+a')x+b+b']}{2};$$

d'où

$$\int \sin(ax+b)\sin(a'x+b')\,dx$$
$$= \frac{\sin[(a-a')x+b-b']}{2(a-a')} + \frac{\sin[(a+a')x+b+b']}{2(a+a')}.$$

Cette formule devient illusoire si $a = a'$; mais, dans ce cas, le terme

$$\frac{\cos[(a - a')x + b - b']}{2}dx$$

se réduit à $\frac{\cos(b - b')}{2}dx$, dont l'intégrale est $\frac{\cos(b - b')}{2}x$.

En général, il sera toujours possible d'intégrer un produit d'autant de sinus et de cosinus que l'on voudra, lorsque les arcs se présenteront sous la forme $ax + b$, puisqu'on saura toujours transformer ce produit en une somme de sinus ou de cosinus.

**366.** On peut, par ce moyen, déterminer

$$\int \sin^n x dx \quad \text{et} \quad \int \cos^n x dx,$$

quand $n$ est un nombre entier positif; mais il vaut mieux développer $\sin^n x$ et $\cos^n x$ en fonction des sinus et cosinus des multiples de $x$. Ainsi, par exemple, comme

$$\sin^5 x = \frac{1}{16}(\sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x),$$

on a

$$\int \sin^5 x dx = \frac{1}{16}\left(-\frac{1}{5}\cos 5x + \frac{5}{3}\cos 3x - 10\cos x\right) + C.$$

INTÉGRATION DES DIFFÉRENTIELLES DE LA FORME $\sin^m x \cos^n x dx$.

**367.** Si l'on pose $\sin x = z$, d'où

$$\cos x = (1 - z^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad dx = dz(1 - z^2)^{-\frac{1}{2}},$$

on a

$$\sin^m x \cos^n dx = z^m(1 - z^2)^{\frac{n-1}{2}} dz,$$

d'où l'on voit que si $n$ est un nombre entier impair, positif ou négatif, on pourra intégrer, quel que soit $m$. On

verra de même, en faisant $\cos x = z$, que l'intégration pourra se faire, quand $m$ sera un nombre entier impair, positif ou négatif.

Dans tous les cas, quels que soient $m$ et $n$, on peut ramener cette intégrale à d'autres intégrales plus simples au moyen de l'intégration par parties. On a, en effet,

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \int \cos^{n-1} x \sin^m x \cos x dx$$

$$= \int \cos^{n-1} x \sin^m x d(\sin x) = \int \cos^{n-1} x d \frac{\sin^{m+1} x}{m+1},$$

et par conséquent

$$(\beta) \quad \begin{cases} \int \sin^m x \cos^n x dx \\ = \cos^{n-1} x \dfrac{\sin^{m+1} x}{m+1} + \dfrac{n-1}{m+1} \int \sin^{m+2} x \cos^{n-2} x dx. \end{cases}$$

On pourra employer cette formule lorsque $m$ sera négatif, parce qu'alors $m+2$ aura une valeur absolue moindre que $m$. Mais on peut obtenir une formule dans laquelle l'exposant $n$ seul sera diminué de deux unités.

Pour cela, observons que l'on a

$$\sin^{m+2} x \cos^{n-2} x = \sin^m x (1 - \cos^2 x) \cos^{n-2} x,$$

ou

$$\sin^{m+2} x \cos^{n-2} x = \sin^m x \cos^{n-2} x - \sin^m x \cos^n x,$$

d'où

$$\int \sin^{m+2} x \cos^{n-2} x dx = \int \sin^m x \cos^{n-2} x dx$$
$$- \int \sin^m x \cos^n x dx.$$

Substituant cette valeur dans la relation $(\beta)$, il vient

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \cos^{n-1} x \frac{\sin^{m+1} x}{m+1}$$
$$+ \frac{n-1}{m+1} \left( \int \sin^m x \cos^{n-2} x dx - \int \sin^m x \cos^n x dx \right),$$

ou bien, en réduisant,

$$(\mathrm{B})\quad \left\{\begin{aligned}&\int \sin^m x \cos^n x dx\\ &= \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \sin^m x \cos^{n-2} x dx.\end{aligned}\right.$$

Ainsi $\int \sin^m x \cos^n x dx$ est ramenée à $\int \sin^m x \cos^{n-2} x dx$. On ramènerait de même cette dernière intégrale à $\int \sin^m \cos^{n-4} x dx$, et ainsi de suite ; en sorte que si $n$ est un nombre entier positif, on sera conduit à l'une des deux intégrales $\int \sin^m x dx$, ou $\int \sin^m \cos x dx$, suivant que $n$ est pair ou impair, intégrales qu'on sait obtenir quand $m$ est un nombre entier positif. En effet, nous avons indiqué plus haut (n° 366) le moyen d'obtenir $\int \sin^m x dx$, et d'un autre côté on a

$$\int \sin^m x \cos x dx = \int \sin^m x d \sin x = \frac{\sin^{m+1} x}{m+1} + \mathrm{C}.$$

368. La formule (B) devient illusoire quand $m = -n$; mais, dans ce cas, la formule ($\beta$) donne

$$\int \operatorname{tang}^m x dx = \frac{\operatorname{tang}^{m+1} x}{m+1} - \int \operatorname{tang}^{m+2} x dx.$$

Changeons maintenant $m+2$ en $m$ ou $m$ en $m-2$, et résolvons par rapport à $\int \operatorname{tang}^m x dx$ : il vient

$$(\mathrm{C})\qquad \int \operatorname{tang}^m x dx = \frac{\operatorname{tang}^{m-1} x}{m-1} - \int \operatorname{tang}^{m-2} x dx.$$

Cette formule sert à réduire l'exposant de tang $x$, et conduit, selon que $m$ est pair ou impair, à

$$\int dx = x + \mathrm{C}, \quad \text{ou à} \quad \int \operatorname{tang} x dx = -1 \cos x + \mathrm{C}.$$

369. La formule (B) fait porter la réduction sur l'ex-

posant de $\cos x$. Mais on peut en obtenir une autre qui réduise l'exposant de $\sin x$ en remplaçant $x$ par $\frac{\pi}{2} - x$, $m$ par $n$ et $n$ par $m$ dans la formule (B), ce qui donne

$$(D)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int \sin^m x \cos^n x dx \\ &= -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int \sin^{m-2} x \cos^n x dx. \end{aligned} \right.$$

Cette formule servira à réduire l'exposant de $\sin x$ lorsque $m$ sera positif. Si $n$ est un nombre entier pair, on a vu qu'au moyen de la formule (B), on ramenait l'intégrale proposée à l'intégrale $\int \sin^m x dx$. Maintenant au moyen de la formule (D), on la ramènera, si $m$ est impair, à l'intégrale $\int \sin x dx = -\cos x + C$, et si $m$ est pair, à l'intégrale $\int dx = x + C$. Donc lorsque $m$ et $n$ seront entiers et positifs, il sera toujours possible de trouver l'intégrale

$$\int \sin^m x \cos^n x dx.$$

370. Les formules que nous venons d'obtenir ne pourraient être employées dans le cas où l'un des exposants $m$ et $n$, ou tous les deux, seraient négatifs. Mais on peut en déduire d'autres, qui permettent de faire les réductions dans ces derniers cas.

Supposons $m$ négatif, $n$ étant positif ou négatif; en remplaçant $m$ par $-m+2$, dans la formule (D), et en résolvant par rapport à l'intégrale qui est dans le second membre, on aura

$$(E)\quad \int \frac{\cos^n dx}{\sin^m x} = \frac{\cos^{n-1} x}{(m-1)\sin^{m-1} x} + \frac{m+n-2}{m-1} \int \frac{\cos^n x}{\sin^{m-2} x} dx:$$

l'intégrale proposée se ramènera donc à $\int \cos^n x dx$ ou à $\int \frac{\cos^n x}{\sin x} dx$, suivant que $m$ sera pair ou impair.

371. On déduit de la formule (D), en supposant $n=0$,

$$(F)\quad \int \sin^m x dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cos x}{m} + \frac{m-1}{m}\int \sin^{m-2} x dx,$$

et, par conséquent, si $m$ est pair,

$$(G)\left\{\begin{aligned} &\int \sin^m x dx = -\frac{\cos x}{m}\Big[\sin^{m-1} x + \frac{m-1}{m-2}\sin^{m-3} x \\ &+ \frac{(m-1)(m-3)}{(m-2)(m-4)}\sin^{m-5} x + \ldots + \frac{(m-1)(m-3)\ldots 3.1}{(m-2)(m-4)\ldots 4.2}\sin x\Big] \\ &+ \frac{(m-1)(m-3)\ldots 3.1}{(m-2)(m-4)\ldots 4.2}\,\frac{x}{m} + C, \end{aligned}\right.$$

et si $m$ est impair,

$$(H)\quad \int \sin^m x dx = -\frac{\cos x}{m}\left[\begin{aligned} &\sin^{m-1} x + \frac{m-1}{m-2}\sin^{m-3} x + \ldots \\ &+ \frac{(m-1)(m-3)\ldots 2}{(m-2)(m-4)\ldots 1} \end{aligned}\right] + C.$$

On obtiendra de la même manière

$$\int \cos^n x dx.$$

# TRENTE ET UNIÈME LEÇON.

*Des intégrales définies.* — Définitions et notations. — Signification géométrique. — Exemples d'intégrales définies. — Des intégrales considérées comme limites de sommes. — Remarques diverses. — Nouvelle démonstration de la série de Taylor.

---

## DÉFINITIONS ET NOTATIONS.

372. $\varphi(x)$ étant une fonction de $x$, dont la différentielle est $f(x)\,dx$, on a

$$\int f(x)\,dx = \varphi(x) + C;$$

$\varphi(x) + C$ est nommée l'*intégrale indéfinie* de la fonction différentielle. Ordinairement on fixe la valeur de la constante indéterminée C d'après la condition que l'intégrale devienne nulle pour une valeur particulière $a$, attribuée à $x$. Dans cette hypothèse,

$$C = -\varphi(a) \quad \text{et} \quad \int f(x)\,dx = \varphi(x) - \varphi(a).$$

Il reste encore dans cette expression une indéterminée $x$; mais si l'on donne à $x$ une valeur particulière $b$, l'intégrale, qui devient $\varphi(b) - \varphi(a)$, est complétement déterminée. On la représente par la notation $\int_a^b f(x)\,dx$, et on la désigne sous le nom d'*intégrale définie*, prise entre les *limites a et b*, ou depuis $x = a$ jusqu'à $x = b$.

On a donc

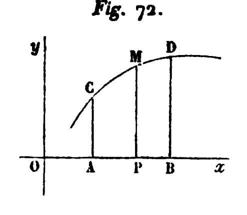
$$\int_a^b f(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(a).$$

Ainsi la valeur de l'intégrale définie s'obtiendra en faisant dans l'intégrale indéfinie $x = a$, puis $x = b$, et retranchant le premier résultat du second.

### SIGNIFICATION GÉOMÉTRIQUE DE L'INTÉGRALE DÉFINIE.

**373.** Soit CMD la courbe dont l'équation en coordonnées rectangulaires est $y = f(x)$. On a vu que $f(x)\,dx$ était la différentielle de l'aire d'un segment terminé à une ordonnée variable : $\int f(x)\,dx$ est donc, d'une manière générale, l'aire comprise entre la courbe, l'axe des abscisses et deux ordonnées quelconques. Mais si la constante arbitraire est déterminée d'après la condition que l'intégrale ou l'aire soit nulle pour $x = \text{OA} = a$, $\text{OP} = x$ étant l'abscisse d'un point quelconque de la courbe, la valeur de l'intégrale pour cette valeur de $x$ sera la surface ACMP. Par conséquent, si l'on y fait $x = \text{OB} = b$, la valeur de l'intégrale représentée, comme nous l'avons dit plus haut, par

*Fig.* 72.




$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

sera la surface CABD, comprise entre la courbe, l'axe O$x$ et les deux ordonnées déterminées AC et BD.

### EXEMPLES D'INTÉGRALES DÉFINIES.

**374.** 1°.
$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \text{C};$$

$$\int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1}, \text{ si } n+1 \text{ est positif.}$$

2°.
$$f(x) = \frac{1}{3x^2 - 2x + 5},$$

$$\int f(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{14}} \operatorname{arc} \frac{3x-1}{\sqrt{14}} + C,$$

$$\int_1^2 f(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{14}}\left(\operatorname{arc\,tang} \frac{5}{\sqrt{14}} - \operatorname{arc\,tang} \frac{2}{\sqrt{14}}\right),$$

$$= \frac{1}{\sqrt{14}} \operatorname{arc\,tang} \frac{3}{10+\sqrt{14}}.$$

3°. $$\int \frac{dx}{x} = \mathrm{l}x + C, \quad \int_a^b \frac{dx}{x} = \mathrm{l}\left(\frac{b}{a}\right).$$

4°. $$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tang} \frac{x}{a} + C,$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tang} 1 = \frac{\pi}{4a}.$$

5°. $$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,sin} x + C, \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

6°. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\,dx = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\,\frac{\pi}{2}.$$

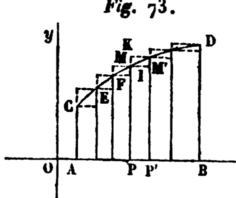
Cette dernière intégrale se déduit de la formule (G) du n° 371, dont tous les termes, à l'exception du dernier, s'annulent aux deux limites.

### INTÉGRALES DÉFINIES CONSIDÉRÉES COMME LIMITES DE SOMMES.

375. Dans ce qui précède, on suppose $f(x)$ finie et continue depuis $x=a$ jusqu'à $x=b$. Nous allons démontrer que, dans ce cas, *l'intégrale définie* $\int_a^b f(x)\,dx$ *est la limite de la somme des valeurs infiniment petites de la différentielle* $f(x)\,dx$, *lorsque* $x$ *varie, par degrés insensibles, depuis* $a$ *jusqu'à* $b$.

Supposons, pour fixer les idées, $a < b$, et admettons

Fig. 73.




que $f(x)$ aille constamment en croissant depuis $f(a)$ jusqu'à $f(b)$. Considérons la courbe CMD dont l'équation, en coordonnées rectangulaires, est

$$y = f(x).$$

Soient $OA = a$, $OB = b$, $OP = x$, $MP = y$, $PP' = \Delta x$.

On a vu, dans le calcul différentiel, que l'aire CADB était égale à la limite de la somme d'une infinité de rectangles tels que MPP'M'. Or on a $MM'P'P = f(x)\,\Delta x$: donc, si l'on désigne par $\Sigma f(x)\,\Delta x$ la somme de tous ces rectangles, on aura p 182

$$\text{aire CABD} = \int_a^b f(x)\,dx = \lim \sum f(x)\,\Delta x = \sum f(x)\,dx,$$

ce qu'il s'agissait de démontrer.

On peut encore démontrer ce théorème d'une manière purement analytique. En effet, soit $\varphi(x)$ l'une quelconque des intégrales de $f(x)\,dx$, en sorte que $f(x) = \varphi'(x)$: on aura

$$\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x) = [\varphi'(x) + \alpha]\,\Delta x,$$

ou

$$(1) \qquad \Delta\varphi(x) = [f(x) + \alpha]\,\Delta x,$$

$\alpha$ étant une fonction de $x$ qui s'annule en même temps que $\Delta x$. Or, si l'on fait varier $x$ par degrés quelconques égaux ou inégaux, mais de plus en plus rapprochés, depuis $x = a$ jusqu'à $x = b$, on obtiendra, pour chaque valeur attribuée à $x$, une équation analogue à l'équation (1): en ajoutant toutes ces équations, on aura dans le premier membre la somme des valeurs de $\Delta\varphi(x)$, c'est-à-dire l'accroissement total de $\varphi(x)$ ou $\varphi(b) - \varphi(a)$; il viendra donc

$$(2) \qquad \varphi(b) - \varphi(a) = \sum f(x)\,\Delta x + \sum \alpha\,\Delta x.$$

 §193 ?

Mais, d'après un théorème démontré (n° 169), on a

$$\lim \sum \alpha \Delta x = 0.$$

Donc l'équation (2) devient, en passant à la limite,

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \int_a^b f(x)\,dx = \lim \sum f(x)\,\Delta x = \sum f(x)\,dx.$$

Ainsi l'intégrale définie est la limite vers laquelle tend la somme des produits tels que $f(x)\,\Delta x$ quand $x$ varie par degrés de plus en plus rapprochés, depuis $a$ jusqu'à $b$; ou, sous une forme plus abrégée, l'intégrale est la somme des valeurs infiniment petites de la différentielle.

C'est à cause de cette propriété que l'on désigne les intégrales par le signe $\int$, lettre initiale du mot *somme*.

#### REMARQUES DIVERSES SUR LES INTÉGRALES DÉFINIES.

**376.** Dans la formule

$$\int_a^b f(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(a),$$

$a$ peut être plus petit ou plus grand que $b$. Ordinairement on fait en sorte que $a$ soit inférieur à $b$. Or, quand il n'en est pas ainsi, on ramène aisément ce cas au premier. En effet, on a

p. 346.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(a),$$

$$\int_b^a f(x)\,dx = \varphi(a) - \varphi(b);$$

d'où il résulte que

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

*Ainsi l'on peut intervertir l'ordre des limites d'une intégrale définie, pourvu que l'on change le signe du résultat.*

377. Si $c$ est une valeur de $x$ comprise entre $a$ et $b$, on aura

$$\int_a^b f(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(a), \quad \int_a^c f(x)\,dx = \varphi(c) - \varphi(a),$$

$$\int_c^b f(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(c);$$

donc

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

On peut encore démontrer cette formule en s'appuyant sur le théorème du n° 375, ou bien en remontant à l'interprétation géométrique des intégrales définies.

On démontrerait de même que

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^e f(x)dx + \int_e^g f(x)dx + \int_g^b f(x)\,dx$$

et ainsi de suite.

378. Quand on ne sait pas intégrer une différentielle donnée $f(x)\,dx$, on peut souvent parvenir à deux limites qui comprennent l'intégrale définie $\int_a^b f(x)\,dx$. Pour cela, soit $\psi(x)$ une fonction de $x$ telle, que l'on ait $\psi(x) < f(x)$ pour toutes les valeurs de $x$, depuis $a$ jusqu'à $b$. Je dis qu'on a l'inégalité

$$\int_a^b f(x)\,dx > \int_a^b \psi(x)\,dx.$$

La considération des courbes le démontre d'abord très-simplement. En effet, soient CMD et C′M′D′ les courbes dont les équations sont respectivement $y = f(x)$, $y = \psi(x)$; comme de

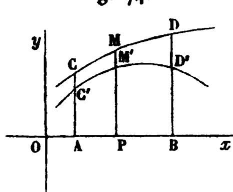


Fig. 74.

$$x = \text{OA} = a \text{ à } x = \text{OB} = b,$$

on a $$f(x) > \psi(x),$$

la courbe C′M′D′ sera au-dessous de la courbe CMD entre les ordonnées CA et BD. Par conséquent on aura

$$\text{aire CABD} > \text{aire C}'\text{A}'\text{B}'\text{D}',$$

ou

$$(1) \qquad \int_a^b f(x)\,dx > \int_a^b \psi(x)\,dx.$$

Autrement: puisque $f(x) - \psi(x)$ est $> 0$, pour toutes les valeurs de $x$, depuis $x = a$ jusqu'à $x = b$, l'intégrale

$\int_a^x [f(x) - \psi(x)]\,dx$, dont la dérivée est positive, croît

en même temps que $x$, et comme cette intégrale est nulle pour $x = a$, elle est toujours positive : on a donc

$$\int_a^b [f(x) - \psi(x)]\,dx > 0, \text{ ou } \int_a^b f(x)\,dx > \int_a^b \psi(x)\,dx.$$

De même, si $\chi(x)$ est une fonction de $x$ telle, que l'on ait $\chi(x) > f(x)$, de $x = a$ à $x = b$, on aura

$$(2) \qquad \int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b \chi(x)\,dx.$$

Par conséquent, si l'on sait intégrer $\psi(x)\,dx$ et $\chi(x)\,dx$, on aura deux limites qui comprendront $\int_a^b f(x)\,dx$.

379. Exemple. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^3}}$.

Tant que $x$ est $< 1$, on a

$$1 < \frac{1}{\sqrt{1-x^3}} < \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

et, par suite,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} dx < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}} < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Or on a

$$\int_0^{\frac{1}{2}} dx = 0,5,$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arc\sin\frac{1}{2} = 0,5236\ldots$$

Donc on aura

$$0,5 < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}} < 0,5236\ldots$$

NOUVELLE DÉMONSTRATION DE LA SÉRIE DE TAYLOR.

**380.** Les propriétés des intégrales définies conduisent à une nouvelle démonstration de la série de Taylor. On a identiquement

$$f(x+h) - f(x) = \int_0^h f'(x+h-t)\,dt;$$

mais l'intégration par parties donne successivement

$$\int_0^t f'(x+h-t)\,dt = t\,f'(x+h-t) + \int_0^t t\,f''(x+h-t)\,dt,$$

$$\int_0^t t\,f''(x+h-t)\,dt = \frac{t^2}{1.2} f''(x+h-t) + \int_0^t \frac{t^2}{1.2} f'''(x+h-t)\,dt,$$

$$\int_0^t \frac{t^2}{1.2} f'''(x+h-t)\,dt = \frac{t^3}{1.2.3} f'''(x+h-t) + \int_0^t \frac{t^3}{1.2.3} f^{\text{IV}}(x+h-t)\,dt,$$

et ainsi de suite. En ajoutant toutes ces égalités, après

y avoir fait $t = h$, on aura

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{1.2}f''(x) + \ldots + \frac{h^n}{1\ldots n}f^n(x) + \text{R},$$

R désignant le reste

$$\frac{1}{1.2\ldots n}\int_0^h f^{n+1}(x+h-t)\,t^n\,dt.$$

Si maintenant M est la plus grande valeur, et $m$ la plus petite valeur que prend $f^{n+1}(x+h-t)$ de $t=0$ à $t=h$, on aura

$$\text{R} < \frac{1}{1.2\ldots n}\int_0^h \text{M}\,t^n\,dt < \frac{\text{M}\,h^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)},$$

$$\text{R} > \frac{1}{1.2\ldots n}\int_0^h m t^n\,dt > \frac{m\,h^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}.$$

Donc, si la fonction proposée et toutes ses dérivées, jusqu'à la $(n+1)^e$, sont finies et continues entre les limites $x$ et $x+h$, R pourra être mis sous la forme

$$\text{R} = \frac{1}{1.2\ldots(n+1)}f^{n+1}(x+\theta h),$$

$\theta$ désignant une quantité positive moindre que 1 : ce qui s'accorde avec ce qu'on a trouvé par d'autres méthodes.

# TRENTE-DEUXIÈME LEÇON.

*Suite des intégrales définies.* — Intégrales dans lesquelles les limites deviennent infinies. — Intégrales dans lesquelles la fonction sous le signe $\int$ devient infinie dans les limites de l'intégration ou à ces limites. — Intégrales définies indéterminées. — *Intégration par séries.* — Exemples.

---

## DES INTÉGRALES DÉFINIES DANS LESQUELLES LES LIMITES DEVIENNENT INFINIES.

381. Nous avons jusqu'à présent supposé que, dans l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$, les deux limites $a$ et $b$ étaient finies, et que la fonction $f(x)$ était finie et continue entre ces mêmes limites. Nous allons maintenant chercher ce que devient l'intégrale lorsque l'une des limites, $b$ par exemple, est infinie, $f(x)$ restant finie et continue. Dans ce cas, la valeur de l'intégrale est la limite de $\int_a^b f(x)\,dx$, quand $b$ croît indéfiniment. Cette valeur peut être finie, infinie ou indéterminée, comme on le verra par les exemples suivants.

382. 1°.
$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx.$$

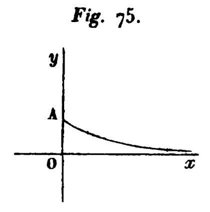
On a d'abord
$$\int e^{-x}\,dx = -e^{-x} + C.$$

Donc
$$\int_0^b e^{-x}\,dx = 1 - \frac{1}{e^b},$$

et, en faisant $b = \infty$,
$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1.$$

Si l'on construit la courbe $y = \frac{1}{e^x}$, on obtient une branche infinie asymptote à l'axe $Ox$ : l'intégrale définie représente l'aire comprise entre cette branche, l'ordonnée OA et l'axe $Ox$.

*Fig.* 75.




2°. $$\int_0^\infty e^x\,dx.$$

On a, dans ce cas,

$$\int_0^b e^x\,dx = e^b - 1,\qquad \int_0^\infty e^x\,dx = \infty.$$

3°. $$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+c^2}.$$

L'intégrale indéfinie est

$$\int \frac{dx}{x^2+c^2} = \frac{1}{c}\,\text{arc tang}\,\frac{x}{c} + \text{C}.$$

Par suite,

$$\int_0^b \frac{dx}{x^2+c^2} = \frac{1}{c}\,\text{arc tang}\,\frac{b}{c},$$

donc $$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+c^2} = \frac{1}{c}\,\text{arc tang}\,\infty = \frac{\pi}{2c}.$$

4°. $$\int_a^\infty \frac{dx}{x}.$$

On a $$\int_a^b \frac{dx}{x} = \text{l}\,\frac{b}{a},\qquad \int_a^\infty \frac{dx}{x} = \infty.$$

5°. $$\int_0^\infty \cos x\,dx.$$

On a

$$\int_0^b \cos x\,dx = \sin b\,;$$

mais quand $b$ tend vers l'infini, sin $b$ ne tend vers aucune limite déterminée. La valeur de l'intégrale $\int_0^\infty \cos x dx$ est donc indéterminée.

383. On peut quelquefois reconnaître si l'intégrale

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

a une valeur finie quand $b$ devient $\infty$.

Supposons $b$ très-grand, mais non infini : en appelant $k$ une quantité comprise entre $a$ et $b$, on a

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^k f(x)\, dx + \int_k^b f(x)\, dx.$$

Puisque $f(x)$ ne devient pas infinie, la première partie de l'intégrale est une quantité finie; il suffit donc de savoir si l'autre partie $\int_k^b f(x)\, dx$ est finie. Mettons $f(x)$ sous la forme

$$f(x) = \frac{\varpi(x)}{x^n},$$

$\varpi(x)$ désignant une fonction qui reste finie pour toutes les valeurs de $x$ plus grandes que $k$. Soit M la plus grande, et $m$ la plus petite des valeurs de $\varpi(x)$, pour toutes les valeurs de $x$ plus grandes que $k$ : on aura

$$\frac{M}{x^n} > f(x) > \frac{m}{x^n}.$$

On aura donc

$$\int_k^b f(x)\, dx < M \int_k^b \frac{dx}{x^n},$$

ou

$$\int_k^b f(x)\, dx < \frac{M}{n-1}\left(\frac{1}{k^{n-1}} - \frac{1}{b^{n-1}}\right).$$

Or, si $n$ est $> 1$, le dernier membre de cette inégalité se réduit, pour $b = \infty$, à $\frac{M}{n-1}\frac{1}{k^{n-1}}$. Donc $\int_a^\infty f(x)\,dx$ dans ce cas, une valeur finie. Si $n$ est $< 1$, on aura

$$\int_k^b f(x)\,dx > m\int_k^b \frac{dx}{x^n},$$

ou

$$\int_k^b f(x)\,dx > \frac{m}{1-n}(b^{1-n} - k^{1-n}).$$

Or, $1 - n$ étant positif, le second membre de cette inégalité devient infini pour $b = \infty$ : donc $\int_k^b f(x)\,dx$, et par suite $\int_a^b f(x)\,dx$ est infinie pour $b = \infty$.

Enfin, si $n = 1$, on a

$$\int_k^b f(x)\,dx > m\int_k^b \frac{dx}{x} = m\,\mathrm{l}\left(\frac{b}{k}\right);$$

mais $\mathrm{l}\left(\frac{b}{k}\right) = \infty$ quand $b = \infty$ : donc

$$\int_k^\infty f(x)\,dx = \infty.$$

La même remarque s'applique à l'intégrale

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx,$$

quand on peut mettre $f(x)$ sous la forme $\frac{\pi(x)}{x^n}$, $\pi(x)$ restant finie pour toutes les valeurs de $x$ comprises entre $-\infty$ et une certaine quantité moindre que $b$ : cette intégrale est finie si $n$ est $> 1$, et infinie si $n$ est $\leqq 1$.

INTÉGRALES DANS LESQUELLES LA FONCTION SOUS LE SIGNE $\int$ DEVIENT INFINIE ENTRE LES LIMITES DE L'INTÉGRATION OU A CES LIMITES.

384. Dans le cas où $f(x)$ devient infinie pour $x = b$, on définit $\int_b^a f(x)\,dx$ comme étant la limite de l'intégrale $\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$, lorsque $\varepsilon$ décroît jusqu'à o.

De même, si $f(a) = \infty$, on définit $\int_a^b f(x)\,dx$ comme la limite de $\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$, quand $\varepsilon$ décroît jusqu'à o.

Enfin, si $f(c)$ est infinie ou discontinue, $c$ étant une quantité comprise entre $a$ et $b$, on pose par définition

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim \int_{c+\eta}^b f(x)\,dx,$$

quand $\varepsilon$ et $\eta$ décroissent jusqu'à o.

On voit, d'après cela, comment il faudrait définir $\int_a^b f(x)\,dx$, si $f(x)$ devenait infinie ou discontinue, pour un plus grand nombre de valeurs de $x$ comprises entre $a$ et $b$.

385. Quand la fonction $f(x)$ devient infinie à l'une des limites ou entre les limites, on peut souvent reconnaître si la valeur de l'intégrale est *finie* ou *infinie*. Supposons par exemple, $f(b) = \infty$ : soit

$$f(x) = \frac{\pi(x)}{(b-x)^n},$$

$n$ étant un nombre positif et $\pi(x)$ une fonction qui ne devient pas infinie, lorsqu'on fait $x \leqq b$. Appelons maintenant $k$ une quantité comprise entre $a$ et $b$ et aussi rap-



p340

by p 354. suppose n < 1 but n not o.

prochée de $b$ que l'on voudra; on a

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^k f(x)\,dx + \int_k^b f(x)\,dx.$$

Or $\int_a^k f(x)\,dx$ a une valeur finie. Il suffit donc de savoir si $\int_k^b f(x)\,dx$ est finie.

Désignons par M et $m$ deux constantes entre lesquelles $\pi(x)$ reste comprise, lorsque $x$ varie de $k$ à $b$. On aura pour ces valeurs de $x$, (si $n$ est $< 1$,)

$$f(x) < \frac{M}{(b-x)^n};$$

par suite,

$$\int_k^{b-\varepsilon} f(x)\,dx < \int_k^{b-\varepsilon} \frac{M\,dx}{(b-x)^n}$$

$$< \frac{M}{1-n}\left[(b-k)^{1-n} - \varepsilon^{1-n}\right].$$

Or, quand $\varepsilon$ tend vers o, le second membre de cette inégalité tend vers la valeur finie $\frac{M}{1-n}(b-k)^{1-n}$. Donc, dans ce cas, $\lim \int_k^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$, et, par suite, $\int_a^b f(x)\,dx$, a une valeur finie.

Je dis maintenant que, si l'on a $n > 1$, l'intégrale proposée est infinie. En effet on a

$$f(x) > \frac{m}{(b-x)^n},$$

par suite,

$$\int_k^{b-\varepsilon} f(x)\,dx > m \int_k^{b-\varepsilon} \frac{dx}{(b-x)^n}$$

$$> \frac{m}{n-1}\left[\frac{1}{\varepsilon^{n-1}} - \frac{1}{(b-k)^{n-1}}\right];$$

p353 n is pas. *

* suppose $n = \frac{1}{q}$ = pas integ

$q$ = " "

$1 < q$

$n$ étant une quantité $> 1$, lorsque $\varepsilon$ tendra vers zéro, le second membre deviendra infini. Donc, *à fortiori*, $\int_k^b f(x)\,dx$ tendra vers l'infini.

Il en serait de même si l'on avait $n = 1$; car, de l'inégalité

$$f(x) > \frac{m}{b-x},$$

on déduit

$$\int_k^{b-\varepsilon} f(x)\,dx > m \int_k^{b-\varepsilon} \frac{dx}{b-x}$$

$$> m\,\mathrm{l}\,\frac{b-k}{\varepsilon}.$$

Le second membre devient infini quand $\varepsilon$ s'annule; donc $\int_k^b f(x)\,dx$, et, par suite, $\int_a^b f(x)\,dx$ elle-même sera infinie.

386. Exemples.

1°. $$\int_a^b \frac{P\,dx}{\sqrt{2b^2 - bx - x^2}},$$

$a$ et $b$ étant deux quantités positives, et P étant une fonction de $x$, qui ne devient infinie pour aucune valeur de $x$, comprise entre $a$ et $b$. On peut écrire

$$\frac{P}{\sqrt{2b^2 - bx - x^2}} = \frac{P}{\sqrt{2b + x}} \times \frac{1}{\sqrt{b-x}} = \frac{\pi(x)}{(b-x)^{\frac{1}{2}}}$$

en faisant $$\frac{P}{\sqrt{2b+x}} = \pi(x).$$

Comme l'exposant de $b - x$ est $< 1$, il résulte de la règle établie ci-dessus que $\int_a^b \frac{P\,dx}{\sqrt{2b^2 - bx - x^2}}$ a une valeur finie.

2°. $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}:$$

on a

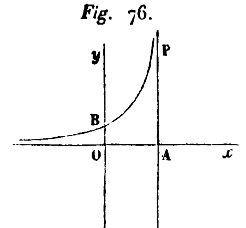
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -2\sqrt{1-x}.$$

Donc $$\int^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2 - 2\sqrt{\varepsilon},$$

et, par suite, $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2.$$

Pour interpréter ce résultat, construisons la courbe $y = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ : cette courbe a pour asymptotes l'axe des $x$ et une parallèle AP à l'axe des $y$ menée à la distance $OA = 1$.

*Fig.* 76.




On voit alors que $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ représente l'aire comprise entre OB, OA, la courbe et son asymptote AP. Ainsi, quoique ce segment s'étende à l'infini, son aire a néanmoins une valeur finie.

DES INTÉGRALES DÉFINIES INDÉTERMINÉES.

387. Une intégrale définie peut quelquefois devenir indéterminée, c'est ce qui a lieu pour l'intégrale

$$\int_0^\infty \cos x dx = \sin\infty - \sin 0,$$

car $\sin x$, lorsque $x$ tend vers l'infini, ne tend vers aucune limite déterminée.

En voici un autre exemple : soit

$$\int_{-a}^{+b} \frac{dx}{x},$$

OB = OA ?

$a$ et $b$ étant deux quantités positives quelconques. Comme $\frac{1}{x}$ devient infini pour $x = 0$, valeur comprise entre $-a$ et $+b$, il faut poser

$$\int_{-a}^{+b} \frac{dx}{x} = \lim \int_{-a}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \lim \int_{\eta}^{+b} \frac{dx}{x},$$

et faire tendre $\varepsilon$ et $\eta$ vers 0. Or,

$$\int_{-a}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} = l\varepsilon - la, \qquad \int_{\eta}^{b} \frac{dx}{x} = lb - l\eta;$$

donc

$$\int_{-a}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\eta}^{b} \frac{dx}{x} = lb - la + l\varepsilon - l\eta$$
$$= l\left(\frac{b}{a}\right) + l\left(\frac{\varepsilon}{\eta}\right).$$

Par conséquent,

$$\int_{-a}^{+b} \frac{dx}{x} = l\left(\frac{b}{a}\right) + \lim l\left(\frac{\varepsilon}{\eta}\right).$$

Mais comme il n'existe aucune dépendance entre les deux quantités variables $\varepsilon$ et $\eta$, $\frac{\varepsilon}{\eta}$ ne tend vers aucune limite déterminée, et par conséquent l'intégrale est indéterminée.

### INTÉGRATION PAR SÉRIES.

388. Étant donnée une différentielle $f(x)\,dx$, si l'on peut exprimer $f(x)$ par une série convergente

$$(1) \qquad f(x) = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + r_n,$$

on aura, en multipliant par $dx$, et en intégrant entre deux limites $a$ et $b$,

$$(2) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u_1\,dx + \int_a^b u_2\,dx + \ldots$$
$$+ \int_a^b u_n\,dx + \int_b^a r_n\,dx.$$

Si la série (1) est convergente pour $x = a$, $x = b$ et pour toutes les valeurs de 1 comprises entre $a$ et $b$, on peut supposer $r_n < \varepsilon$, $\varepsilon$ étant une quantité aussi petite que l'on veut, pourvu que $n$ soit assez grand. Dès lors

$$\int_a^b r_n\,dx < \int_a^b \varepsilon\,dx,$$

ou

$$\int_a^b r_n\,dx < \varepsilon(b-a).$$

Donc $\int_a^b r_n\,dx$ décroît jusqu'à zéro quand $n$ augmente jusqu'à l'infini. Il en résulte que la série

$$\int_a^b u_1\,dx + \int_a^b u_2\,dx + \int_a^b u_3\,dx + \ldots + \int_a^b u_n\,dx + \ldots$$

est convergente et qu'elle a pour somme $\int_a^b f(x)\,dx$. On peut remplacer la valeur fixe $b$ par l'indéterminée $x$, et il vient

$$(3)\qquad \int_a^x f(x)\,dx = \int_a^x u_1\,dx + \int_a^x u_2\,dx + \ldots + \ldots.$$

389. Cette formule est encore vraie pour $x = b$, même lorsque la série $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$, convergente quand $x$ est moindre que $b$, devient divergente pour $x = b$, pourvu que la série (2) soit encore convergente. En effet, quelque petite que soit la quantité positive $\varepsilon$, on a

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = \int_a^{b-\varepsilon} u_1\,dx + \int_a^{b-\varepsilon} u_2\,dx + \int_a^{b-\varepsilon} u_3\,dx + \ldots.$$

Or les deux membres étant des fonctions continues de $x$, qui ont constamment la même valeur, leurs limites pour

$\varepsilon = 0$ doivent être égales. Donc

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u_1\,dx + \int_a^b u_2\,dx + \int_a^b u_3\,dx + \ldots.$$

390. En général, si la formule de Maclaurin donne pour $f(x)$ une série convergente,

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{1.2}f''(0) + \frac{x^3}{1.2.3}f'''(0) + \ldots,$$

on aura

$$\int f(x)\,dx = C + xf(0) + \frac{x^2}{1.2}f'(0) + \frac{x^3}{1.2.3}f''(0) + \ldots.$$

Si l'on veut en déduire l'intégrale définie $\int_0^x f(x)\,dx$, c'est-à-dire si l'on veut que l'intégrale commence à $x = 0$, ou soit nulle pour $x = 0$, il faut, dans ce cas, que C soit nul. On a alors

$$\int_0^x f(x)\,dx = xf(0) + \frac{x^2}{1.2}f'(0) + \frac{x^3}{1.2.3}f''(0) \ldots.$$

### EXEMPLES D'INTÉGRATION PAR SÉRIES.

391. 1°. $$\int \frac{dx}{1+x} = l(1+x).$$

Par une simple division on trouve

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 - \ldots \pm x^{n-1} \mp \frac{x^n}{1+x}.$$

Donc

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \cdots \pm \frac{x^n}{n} \mp \int_0^x \frac{x^n\,dx}{1+x}.$$

Quand $x$ est moindre que 1 en valeur absolue, la série $1 - x + x^2 - x^3 \ldots$ est convergente; donc la série $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \cdots$ l'est aussi entre les mêmes limites

de $x$. Donc quand $-1 < x < +1$, on a

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \cdots$$

On peut démontrer directement que $\int_0^x \frac{x^n dx}{1+x}$ tend vers zéro quand $n$ augmente indéfiniment.

En effet, si $x$ est positive, on a

$$\frac{x^n}{1+x} < x^n,$$

donc

$$\int_0^x \frac{x^n dx}{1+x} < \int_0^x x^n dx < \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Or quand $n$ augmente, le dernier membre tend vers zéro. D'après cela, en arrêtant la série à un certain terme, l'erreur commise sera moindre que le terme suivant. Cette erreur sera en plus ou en moins, suivant que le dernier terme employé sera de rang pair ou de rang impair.

Quand $x$ est négative, en désignant par $\alpha$ une quantité plus grande que $x$, mais moindre que $1$, on a

$$\frac{x^n}{1-x} < \frac{x^n}{1-\alpha},$$

et, par suite,

$$\int_0^x \frac{x^n dx}{1-x} < \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1-\alpha)},$$

expression qui tend vers zéro lorsque $n$ augmente jusqu'à l'infini. Dans ce cas, l'erreur est toujours dans le même sens.

Si l'on avait $x = 1$, la série $1 - 1 + 1 - 1 + 1 \ldots$ cesserait d'être convergente, mais la série $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \cdots$ le serait encore, et représenterait $l\,2$ (n° 389). On a donc

$$l\,2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

2°. $$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tang}\, x.$$

On a

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 \ldots \pm x^{n-1} \mp \frac{x^{n+1}}{1+x^2},$$

$n$ étant un nombre positif impair : en intégrant les deux membres, et prenant pour arc tang $x$ le plus petit des arcs positifs ayant $x$ pour tangente, on trouve

$$\text{arc tang}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \ldots \pm \frac{x^n}{n} \mp \int_0^x \frac{x^{n+1}\, dx}{1+x^2}.$$

La série $1 - x^2 + x^4 - x^6 \ldots$ cesse d'être convergente pour $x = 1$, mais la série $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \ldots$ l'est encore pour $x = 1$ ; on aura donc

$$\text{arc tang}\, 1 = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \ldots.$$

3°. $$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc sin}\, x.$$

Par la formule du binôme, on aura

(1) $$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \ldots.$$

Multipliant le second membre par $dx$ et intégrant, il vient

$$\text{arc sin}\, x = x + \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{x^7}{7} \ldots,$$

série convergente quand $-1 < x < 1$, puisque la série (1) est convergente entre ces limites.

La série

$$1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 \ldots$$

cesse d'être convergente pour $x = 1$ ; néanmoins, comme

pour $x = 1 = \sin\frac{\pi}{6}$, la série

$$x + \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\,\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{x^7}{7}\ldots$$

est encore convergente, on a (n° 389)

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2}\,\frac{1}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1.3.5}{2.5.6}\cdot\frac{1}{7}\cdots$$

On trouve une série plus convergente, en faisant $x = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$; on a

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^3.3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{2^5.5} + \cdots$$

# TRENTE-TROISIÈME LEÇON.

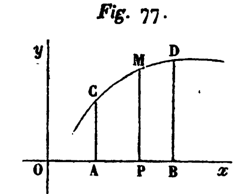
## APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DU CALCUL INTÉGRAL.

*Quadrature des aires planes.* — Formules générales. — Quadrature des courbes rapportées à des coordonnées rectilignes. — Quadrature des courbes rapportées à des coordonnées polaires.

---

### FORMULES GÉNÉRALES.

**392.** Soit CMD la courbe dont l'équation en coordonnées rectangulaires est $y = f(x)$, et représentons par $u$ l'aire ACMP. On aura, en appelant $x$ et $y$ les coordonnées du point variable M (n° 204),




$$du = y\,dx = f(x)\,dx.$$

Par conséquent $u = \int f(x)\,dx$.

Si l'on veut que l'aire soit limitée à l'ordonnée CA correspondant à l'abscisse $OA = a$, l'intégrale doit commencer à $x = a$, et l'on a

$$u = \int_a^x f(x)\,dx;$$

$x$ représentant l'abscisse d'un point quelconque de la courbe.

Enfin, si on limite de même l'aire à l'ordonnée BD correspondant à $x = OB = b$, on a

$$u = \text{aire ABCD} = \int_a^b f(x)\,dx.$$

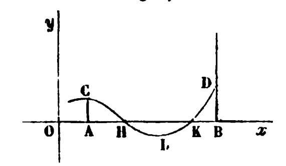
Si les axes étaient obliques, il faudrait poser, en appe-

lant $\theta$ l'angle des axes,

$$\text{aire ABCD} = \sin\theta \int_a^b f(x)\,dx.$$

393. L'intégrale définie est la somme des valeurs infiniment petites de la différentielle entre les deux limites $a$ et $b$. Or, si l'on suppose, ce qui est le cas ordinaire, que $dx$ soit positive, $f(x)\,dx$ ou la différentielle de l'aire sera positive ou négative, suivant que $f(x)$ ou l'ordonnée $y$ sera positive ou négative. Par conséquent, l'intégrale représentera la différence entre la somme des segments situés au-dessus de l'axe des $x$ et la somme des segments situés au-dessous, de sorte que, si l'ordonnée change de signe, deux fois par exemple, entre les ordonnées AC et BD, on aura

*Fig.* 78.




$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{ACH} - \text{HIK} + \text{KDB}.$$

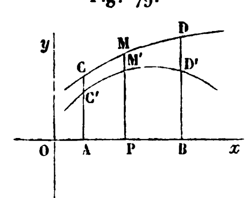
La somme de ces segments serait donnée par

$$\int_a^h f(x)\,dx - \int_h^k f(x)\,dx + \int_k^b f(x)\,dx,$$

en désignant par $h$ et $k$ les abscisses OH et OK.

394. Si l'on voulait avoir la mesure de la surface comprise entre les deux ordonnées CA, MP, l'arc CM et l'arc C′M′ d'une autre courbe $y = \varphi(x)$, on aurait

*Fig.* 79.




$$\text{aire CC}'\text{M}'\text{M} = \int_a^x y\,dx - \int_a^x y'\,dx = \int_a^x (y - y')\,dx.$$

EXEMPLES DE QUADRATURES DE COURBES RAPPORTÉES A DES COORDONNÉES RECTILIGNES.

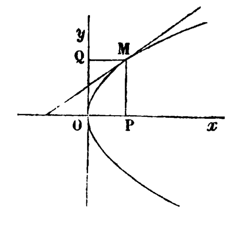
395. Soit d'abord, comme exemple de la théorie précédente, une *parabole* quelconque $y^n = px^m$, $m$ et $n$ étant positifs. Soit aire OMP $= u$; on a

$$du = ydx = p^{\frac{1}{n}} x^{\frac{m}{n}} dx,$$

d'où

$$\int_0^x p^{\frac{1}{n}} x^{\frac{m}{n}} dx = \frac{n}{m+n} p^{\frac{1}{n}} x^{\frac{m+n}{n}}.$$

*Fig.* 80.




Ce résultat peut s'écrire

$$u = \frac{n}{m+n} p^{\frac{1}{n}} x^{\frac{m}{n}} x = \frac{n}{m+n} xy.$$

Or $xy$ représente l'aire du rectangle OPMQ construit sur les coordonnées du point M. On a donc

$$\text{OMP} : \text{OPMQ} = n : m + n,$$

ou

$$\text{OMP} : \text{OMQ} = n : m.$$

Ainsi la parabole partage ce rectangle dans un rapport constant, de $n : m$.

396. Réciproquement, il n'y a que les paraboles qui jouissent de cette propriété. En effet, la proportion précédente peut s'écrire

$$u : xy - u = n : m,$$

d'où

$$(m + n) u = nxy.$$

Par conséquent, on doit avoir

$$(m + n) du = nxdy + nydx,$$

ou, puisque $du = ydx$,

$$(m+n)ydx = nxdy + nydx,$$

ou enfin

$$mydx = nxdy.$$

Ce résultat peut se mettre sous la forme

$$m\frac{dx}{x} = n\frac{dy}{y};$$

d'où, en intégrant,

$$n\,\mathrm{l}\,y = m\,\mathrm{l}\,x + \mathrm{C}, \quad \text{ou} \quad \mathrm{l}\,y^n = \mathrm{l}\,x^m + \mathrm{C}.$$

Mettant C sous la forme $\mathrm{l}\,p$, il vient, pour l'équation générale des courbes qui possèdent la propriété dont il s'agit,

$$\mathrm{l}\,y^n = \mathrm{l}\,p.x^m,$$

ou

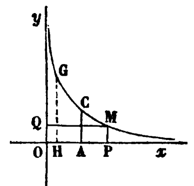
$$y^n = px^m.$$

Dans le cas de la parabole ordinaire $y^2 = px$, on a $n = 2$, $m = 1$, et par suite

$$u = \frac{2}{3}xy.$$

397. Considérons, en second lieu, une courbe du genre *hyperbole* donnée par l'équation

Fig. 81.




$$x^m y^n = p,$$

$m$ et $n$ étant deux nombres entiers positifs. On n'a représenté dans la figure que la branche située dans l'angle $yOx$, et qui a pour asymptotes les deux axes.

On peut supposer $n > m$. Soient $u = \mathrm{ACMP}$, $\mathrm{OA} = a$, $\mathrm{OP} = x$. On a

$$u = \int_a^x ydx = \int_0^x p^{\frac{1}{n}} x^{-\frac{m}{n}} dx,$$

et, en effectuant l'intégration,

$$u = \frac{n}{n-m} p^{\frac{1}{n}} \left( x^{\frac{n-m}{n}} - a^{\frac{n-m}{n}} \right).$$

On voit que si $x$ augmente jusqu'à l'infini, l'aire ACMP augmente aussi jusqu'à l'infini. Mais, au contraire, si, laissant MP fixe, on fait décroître $a$ jusqu'à o, la surface augmente continuellement, mais en restant toujours finie, et à la limite, quand $a = 0$, cette aire se réduit à

$$\frac{n}{n-m} p^{\frac{1}{n}} x^{\frac{n-m}{n}}.$$

Ainsi la surface ACGH tend vers une limite finie, à mesure que le point G se rapproche de plus en plus de l'asymptote O$y$.

Cette limite étant égale à $\frac{n}{n-m} p^{\frac{1}{n}} x . x^{-\frac{m}{n}}$ ou bien à $\frac{n}{m-n} xy$, est dans le rapport constant de $n$ à $n-m$, avec le rectangle OPMQ $= xy$. On a donc la proportion

$$u : xy = n : n - m,$$

en désignant par $u$ l'aire indéfinie qui cependant a une valeur finie.

398. Réciproquement, il n'y a que les courbes comprises dans l'équation $x^m y^n = p$ qui jouissent de cette propriété. En effet, on déduit de la proportion précédente

$$u\,(n-m) = nxy.$$

D'où, en différentiant

$$(n-m)\,du = nxdy + nydx,$$

ou comme $du = ydx$, il vient en réduisant et divisant par $xy$,

$$-m\frac{dx}{x} = n\frac{dy}{y}.$$

Donc, en intégrant,

$$n \log y = C - m \log x,$$

ou bien, en faisant $C = l\,p$,

$$l\,y^n = l\,\frac{p}{x^m},$$

d'où

$$x^m y^n = p.$$

Dans le cas particulier où $m = n$, l'équation

$$x^m y^n = p$$

revient à la suivante

$$xy = p,$$

qui représente une hyperbole équilatère du second degré. On aura

$$y = \frac{p}{x}, \quad \text{donc} \quad y\,dx = p\,\frac{dx}{x},$$

et, par suite,

$$u = p\,l\,x + C = p\,l\,\frac{x}{a}.$$

Si $p = 1$, $a = 1$, on aura

$$u = l\,x,$$

c'est-à-dire que l'aire est égale au logarithme népérien de l'abscisse (n° 208, 2°).

399. Soit maintenant le *cercle* dont l'équation est

$$y^2 + x^2 = a^2;$$

on en tire

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}.$$

*Fig.* 82.

Considérons un segment quelconque AOPM, limité à l'axe des $y$, et à une ordonnée arbitraire MP. Nous aurons, en désignant par $u$ l'aire de ce segment,

$$(1) \qquad u = \int_0^x dx\sqrt{a^2 - x^2};$$

en intégrant par parties, il vient

$$(2)\qquad \int dx\sqrt{a^2-x^2} = x\sqrt{a^2-x^2} + \int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Mais

$$\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int\frac{(x^2-a^2+a^2)\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$= a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} - \int dx\sqrt{a^2-x^2}.$$

Portant cette valeur dans l'équation (2), transposant et divisant par 2, il viendra

$$\int dx\sqrt{a^2-x^2} = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Mais

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C;$$

donc

$$u = \int_0^x dx\sqrt{a^2-x^2} = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}.$$

On déduit de là l'aire du secteur OCM. En effet, le triangle OMP a pour mesure $\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}$; en le retranchant du segment, on aura donc

$$\text{secteur OCM} = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} = \frac{a}{2}\,a\arcsin\frac{x}{a} = \frac{a}{2}\,\text{arc CM},$$

c'est-à-dire que *l'aire du secteur circulaire a pour mesure le produit de l'arc qui lui sert de base par la moitié de son rayon*.

400. Passons maintenant à l'*ellipse*, dont l'équation

est

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

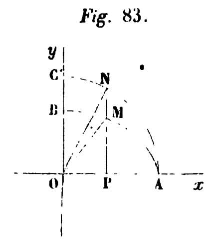


*Fig.* 83.

et soit $u$ le segment OPMB, limité à l'axe des $y$ et à une ordonnée quelconque MP. On tire de l'équation de l'ellipse

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Donc,

$$u = \frac{b}{a}\int_0^x \sqrt{a^2 - x^2}\,dx.$$

Décrivons sur l'axe $2a$ comme diamètre une demi-circonférence, et soit $u'$ l'aire du segment COPN : on a

$$u' = \int_0^x dx\sqrt{a^2 - x^2},$$

d'où l'on déduit

$$\frac{u}{u'} = \frac{b}{a}.$$

Ainsi *le segment elliptique et le segment circulaire, qui correspondent à la même abscisse, sont entre eux dans le rapport constant de* b *à* a. Il en résulte que si l'on désigne par S la surface entière de l'ellipse, et par S′ la surface du cercle, on aura

$$S : S' = b : a,$$

d'où l'on tire, à cause de $S' = \pi a^2$,

$$S = \frac{b}{a} \times \pi a^2 = \pi ab:$$

donc *la surface de l'ellipse est moyenne proportionnelle entre les surfaces des deux cercles qui ont pour diamètres respectifs les deux axes de l'ellipse.*

**401.** Les deux triangles OMP, ONP, qui ont même

base OP, sont entre eux comme leurs hauteurs. Donc

$$\frac{\text{OMP}}{\text{ONP}} = \frac{\text{NP}}{\text{MP}} = \frac{b}{a};$$

et comme d'ailleurs

$$\frac{u}{u'} = \frac{b}{a},$$

on aura

$$\frac{u - \text{OMP}}{u' - \text{ONP}} = \frac{b}{a},$$

ou

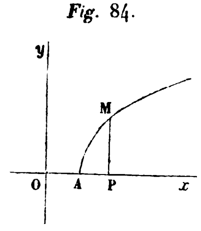
$$\frac{\text{OBM}}{\text{ONC}} = \frac{b}{a},$$

ce qui permettra d'évaluer le secteur elliptique OBM, puisque l'aire du secteur circulaire ONC est connue. On passera de là facilement à l'aire d'un secteur quelconque.

On peut diviser l'ellipse en un certain nombre de secteurs égaux, quand on sait faire la même opération pour le cercle. Il suffit de diviser le cercle en parties égales, puis de mener, par les points de division, des ordonnées perpendiculaires à OA. Si l'on joint le centre aux points où ces ordonnées rencontrent l'ellipse, on aura divisé celle-ci en secteurs égaux.

**402.** Pour l'*hyperbole*, dont l'équation est

*Fig.* 84.




$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2},$$

l'aire du segment AMP est donnée par la formule

$$u = \frac{b}{a}\int_a^x \sqrt{x^2 - a^2}\,dx.$$

En intégrant par parties, on a

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx = x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Mais

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \int \frac{(x^2-a^2+a^2)\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$= \int dx\,\sqrt{x^2-a^2} + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}},$$

et (n° 343, 1°)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \mathrm{l}\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)+\mathrm{C};$$

on a donc

$$\int dx\,\sqrt{x^2-a^2} = \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\,\mathrm{l}\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)+\mathrm{C}.$$

On déduit de là

$$\mathrm{AMP} = \frac{bx\sqrt{x^2-a^2}}{2a} - \frac{ab}{2}\,\mathrm{l}\left(\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right).$$

**403.** Comme dernière application, considérons la *cycloïde* AMD engendrée par le mouvement du cercle ANB roulant sur la droite BD. Prenons pour origine des coordonnées le sommet A, et pour axes la normale et la tangente à la courbe en ce point. L'équation différentielle de la cycloïde est alors

*Fig.* 85.



$$dx = dy\sqrt{\frac{2a-y}{y}}.$$

On aura donc

$$\text{aire AMP} = \int_0^y y\,dx = \int_0^y dy\,\sqrt{2ay-y^2}.$$

Menons MQ perpendiculaire à AB, et soit AQN le segment déterminé par MQ dans le cercle ANB. En observant que $\mathrm{QN} = \sqrt{2ay-y^2}$, nous avons

$$\text{segm. AQN} = \int_0^y dy\,\sqrt{2ay-y^2}:$$

donc

$$\text{AMP} = \text{segm. ANQ}.$$

Si l'on fait $x = \pi a$, et par conséquent $y = 2a$, on aura

$$\text{ADG} = \frac{\pi a^2}{2}.$$

Retranchant cette aire de l'aire $2\pi a^2$ du rectangle ABDG, et doublant, on aura

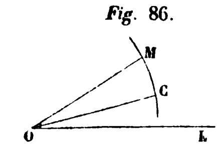
$$2 \text{ aire AMDB} = 3\pi a^2;$$

c'est-à-dire que *l'aire comprise entre un arc de cycloïde et sa base est égale à trois fois l'aire du cercle générateur.*

QUADRATURE DES COURBES RAPPORTÉES A DES COORDONNÉES POLAIRES.

404. Si $u$ désigne l'aire du secteur COM, on aura

*Fig.* 86.




$$du = \frac{1}{2} r^2 \, d\theta,$$

$r$ et $\theta$ étant les coordonnées polaires du point M; par suite,

$$u = \frac{1}{2} \int r^2 \, d\theta,$$

cette intégrale ayant pour limites les valeurs de $\theta$ qui correspondent aux points C et M.

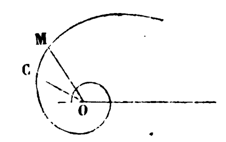
405. Soit comme application la *spirale logarithmique,* dont l'équation est

$$r = ae^{m\theta};$$

on aura

$$u = \frac{a^2}{2} \int e^{2m\theta} \, d\theta = \frac{a^2}{4m} e^{2m\theta} + \text{C} = \frac{r^2}{4m} + \text{C}.$$

*Fig.* 87.




Posons $\text{OC} = r'$, et faisons dans la formule $r = r'$; il vient

$$0 = \frac{r'^2}{4m} + \text{C},$$

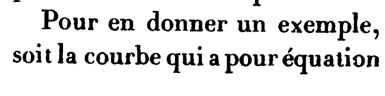
par suite,

$$u = \frac{1}{4m}(r^2 - r'^2).$$

Si le point C se meut en rétrogradant sur la courbe, le rayon vecteur OC décroît jusqu'à o, et l'aire du secteur tend vers la limite $\frac{r^2}{4m}$.

**406.** La quadrature des aires curvilignes est quelquefois rendue plus facile par l'emploi des coordonnées polaires.

*Fig.* 88.




Pour en donner un exemple, soit la courbe qui a pour équation

$$(1) \qquad x^3 + y^3 - axy = 0.$$

Cette courbe, connue sous le nom de *folium de Descartes*, se compose de deux branches infinies qui se traversent mutuellement à l'origine, et qui ont pour asymptote commune la droite dont l'équation est

$$x + y + \frac{a}{3} = 0.$$

Quand on conserve les coordonnées primitives, la question qui nous occupe exige la résolution d'une équation du troisième degré; mais si l'on prend l'équation polaire de la courbe, en plaçant le pôle au point O, on n'aura jamais qu'une seule valeur du rayon vecteur pour une direction donnée; car l'origine étant un point double, l'équation devra être satisfaite pour deux valeurs nulles de $r$, et par conséquent le premier membre sera divisible par $r^2$.

Si l'on prend O$x$ pour axe polaire, il faudra remplacer $x$ par $r\cos\theta$ et $y$ par $r\sin\theta$ dans l'équation (1), ce qui donne

$$r^3(\cos^3\theta + \sin^3\theta) - ar^2\sin\theta\cos\theta = 0,$$

ou bien, en supprimant le facteur $r^2$ et résolvant par rapport à $r$,

$$(2) \qquad r = \frac{a \sin\theta \cos\theta}{\sin^3\theta + \cos^3\theta}.$$

D'ailleurs, $u$ désignant l'aire du segment OAM, on a

$$u = \frac{1}{2}\int_0^\theta r^2 d\theta.$$

Donc, en remplaçant $r$ par sa valeur, nous aurons

$$u = \frac{1}{2}\int_0^\theta \frac{a^2 \sin^2\theta \cos^2\theta}{(\cos^3\theta + \sin^3\theta)^2} d\theta = \frac{a^2}{2}\int_0^\theta \frac{\sin^2\theta \, d\theta}{\cos^4\theta\,(1 + \operatorname{tang}^3\theta)^2},$$

ou bien

$$u = \frac{a^2}{2}\int_0^\theta \frac{\operatorname{tang}^2\theta \dfrac{d\theta}{\cos^2\theta}}{(1 + \operatorname{tang}^3\theta)^2}.$$

Pour trouver cette intégrale, posons

$$1 + \operatorname{tang}^3\theta = z, \quad \text{d'où} \quad dz = 3\operatorname{tang}^2\theta \frac{d\theta}{\cos^2\theta},$$

et, par suite,

$$\int \frac{\operatorname{tang}^2\theta \dfrac{d\theta}{\cos^2\theta}}{(1 + \operatorname{tang}^3\theta)^2} = \frac{1}{3}\int \frac{dz}{z^2} = -\frac{1}{3z} + C$$

$$= -\frac{1}{3(-1 + \operatorname{tang}^3\theta)} + C.$$

En reportant cette valeur dans $u$, on a

$$u = -\frac{a^2}{6} \cdot \frac{1}{1 + \operatorname{tang}^3\theta} + C.$$

La constante C devant être déterminée de manière que l'aire soit nulle pour $\theta = 0$, on a $C = \frac{a^2}{6}$: par suite

$$u = \frac{a^2}{6}\,\frac{\operatorname{tang}^3\theta}{1 + \operatorname{tang}^3\theta}.$$

On obtiendra l'aire de la feuille entière, en faisant $\theta = \frac{\pi}{2}$ dans la valeur de $u$, qui devient alors $\frac{a^2}{6}$; car la fraction $\frac{\tang^3 \theta}{1 + \tang^3 \theta}$, que l'on peut écrire $\frac{1}{1 + \cot^3 \theta}$, est égale à 1 pour $\theta = \frac{\pi}{2}$.

---

# TRENTE-QUATRIÈME LEÇON.

*Rectification des courbes planes.* — **Formule générale. — Application à divers exemples. — Parabole. — Ellipse. — Hyperbole. — Cycloïde.**

### FORMULE GÉNÉRALE.

**407.** Si l'on désigne par $s$ un arc de courbe compris entre un point fixe et un point de cette courbe, dont les coordonnées rectangulaires sont $x$ et $y$, on a

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Il suffira donc, pour trouver la longueur de l'arc, d'intégrer la formule $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ entre des limites convenables, après avoir remplacé $y$ ou $x$ par sa valeur tirée de l'équation de la courbe : si $y$, par exemple, est fonction de $x$, on prendra

$$s = \int dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}.$$

### RECTIFICATION DE LA PARABOLE.

**408.** Si, par exemple, nous voulons trouver la longueur d'un arc de la *parabole* dont l'équation est

$$y^2 = 2px,$$

il faut dans la formule

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

où nous supposerons ici $x$ fonction de $y$, remplacer $dx$ par sa valeur tirée de l'équation différentielle $ydy = pdx$, ce qui donnera

$$ds = \sqrt{\frac{y^2 dy^2}{p^2} + dy^2} = \frac{dy}{p} \sqrt{y^2 + p^2}.$$

Nous avons donc, si l'arc doit commencer au sommet de la courbe,

$$s = \frac{1}{p}\int_0^y dy\sqrt{y^2+p^2}.$$

En intégrant par parties, il vient

$$\int dy\sqrt{y^2+p^2} = y\sqrt{y^2+p^2} - \int \frac{y^2\,dy}{\sqrt{y^2+p^2}};$$

mais on a

$$\int \frac{y^2\,dy}{\sqrt{p^2+y^2}} = \int dy\sqrt{y^2+p^2} - p^2\int\frac{dy}{\sqrt{p^2+y^2}}.$$

Par conséquent, en substituant et transposant,

$$2\int dy\sqrt{y^2+p^2} = y\sqrt{y^2+p^2} + p^2\int\frac{dy}{\sqrt{y^2+p^2}}.$$

Or on sait que (nº 343, 1º)

$$\int\frac{dy}{\sqrt{y^2+p^2}} = \mathrm{l}\left(y+\sqrt{y^2+p^2}\right) + \mathrm{C};$$

donc

$$\frac{1}{p}\int dy\sqrt{y^2+p^2} = \frac{y\sqrt{y^2+p^2}}{2p} + \frac{p}{2}\,\mathrm{l}\left(y+\sqrt{y^2+p^2}\right) + \mathrm{C}.$$

L'intégrale devant s'annuler pour $y=0$, on aura

$$0 = \frac{p}{2}\,\mathrm{l}p + \mathrm{C}, \quad \text{d'où} \quad \mathrm{C} = -\frac{p}{2}\,\mathrm{l}p;$$

en substituant cette valeur dans la formule, il vient

$$s = \frac{y\sqrt{y^2+p^2}}{2p} + \frac{p}{2}\,\mathrm{l}\left(\frac{y+\sqrt{y^2+p^2}}{p}\right).$$

### RECTIFICATION DE L'ELLIPSE.

409. Considérons l'arc d'*ellipse* BM, compté à partir du sommet B du petit axe (*fig.* 83, page 370).

De l'équation de la courbe

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

on tire

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y};$$

on aura donc

$$ds = dx\sqrt{1 + \frac{b^4x^2}{a^4y^2}} = dx\sqrt{1 + \frac{b^4x^2}{a^2(a^2b^2 - b^2x^2)}},$$

ou bien

$$ds = dx\sqrt{\frac{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}{a^2(a^2 - x^2)}}.$$

Posons pour simplifier $\sqrt{a^2 - b^2} = ae$, $e$ désignant l'excentricité, c'est-à-dire le rapport de la distance focale au grand axe : il vient

$$ds = dx\sqrt{\frac{a^2 - e^2x^2}{a^2 - x^2}}.$$

Observons maintenant que $x$ varie entre $0$ et $a$ : par conséquent on aura toutes les valeurs de $x$ en faisant

$$x = a\sin\varphi,$$

l'angle $\varphi$ variant de $0$ à $\frac{\pi}{2}$ : il en résulte

$$ds = ad\varphi\cos\varphi\sqrt{\frac{1 - e^2\sin^2\varphi}{1\cos^2\varphi}} = ad\varphi\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}.$$

Nous aurons donc enfin

$$s = \text{arc BM} = a\int_0^\varphi d\varphi\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}.$$

410. L'intégrale $\int_0^\varphi d\varphi\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}$ est une fonc-

tion transcendante dont la valeur ne peut être obtenue que par un développement en série. La formule du binôme donne

$$(1-e^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}e^2\sin^2\varphi - \frac{1}{2}\frac{1}{4}e^4\sin^4\varphi$$
$$-\frac{1.1.3}{2.4.6}e^6\sin^6\varphi - \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}e^8\sin^8\varphi\ldots.$$

On a alors pour l'arc BM

$$s = a\left(\begin{array}{l}\varphi - \frac{1}{2}e^2\int d\varphi\sin^2\varphi - \frac{1}{2}\frac{1}{4}e^4\int d\varphi\sin^4\varphi\\ -\frac{1.1.3}{2.4.6}e^6\int d\varphi\sin^6\varphi\ldots\end{array}\right).$$

Les intégrales du second membre s'obtiendront en substituant $\varphi$ à $x$ dans la formule (G) du n° 371, ce qui donne

$$(2)\left\{\begin{array}{l}\int\sin^m\varphi\, d\varphi = -\frac{\cos\varphi}{m}\Big[\sin^{m-1}\varphi + \frac{m-1}{m-2}\sin^{m-3}\varphi\\ + \frac{(m-1)(m-3)}{(m-2)(m-4)}\sin^{m-5}\varphi\ldots + \frac{(m-1)(m-3)\ldots5.3.1}{(m-2)(m-4)\ldots4.2}\sin\varphi\Big]\\ + \frac{(m-1)(m-3)\ldots5.3.1}{(m-2)(m-4)\ldots4.2}\frac{\varphi}{m}.\end{array}\right.$$

On ne met pas de constante arbitraire parce que cette intégrale doit commencer à zéro.

411. Si l'on veut avoir le quart de l'ellipse, il faudra faire $\varphi = \frac{\pi}{2}$ dans toutes les intégrales. Cette substitution effectuée dans la formule (2) donne

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m\varphi\, d\varphi = \frac{1.3.5\ldots(m-3)(m-1)}{2.4.6\ldots m}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

On aura alors

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}e^2\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}e^4\frac{1.3}{2.4}\frac{\pi}{2} - \frac{1.1.3}{2.4.6}e^6\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{\pi}{2},\ldots,$$

et par suite

$$\text{BMA} = \frac{\pi a}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{2}e\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}e^2\right)^2 - \frac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}e^3\right)^2 - \frac{1}{7}\left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}e^4\right)^2\ldots\right],$$

série convergente, et d'autant plus convergente que $e$ est plus petit, ou que $a$ diffère moins de $b$. Lorsque l'ellipse s'écarte peu du cercle décrit sur le grand axe, il suffit de calculer un petit nombre de termes de la série.

**412.** On aurait pu parvenir à ce résultat sans recourir à la formule (2). En effet, si, dans la relation

$$\int \sin^m\varphi\,d\varphi = -\frac{\sin^m\varphi\cos\varphi}{m} + \frac{m-1}{m}\int \sin^{m-2}\varphi\,d\varphi,$$

on prend les intégrales entre les limites zéro et $\frac{\pi}{2}$, on aura

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m\varphi\,d\varphi = \frac{m-1}{m}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2}\varphi\,d\varphi.$$

On aura de même

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2}\varphi\,d\varphi = \frac{m-3}{m-2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-4}\varphi\,d\varphi,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-4}\varphi\,d\varphi = \frac{m-5}{m-4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-6}\varphi\,d\varphi,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\,d\varphi = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Par suite, en multipliant toutes ces équations terme à

terme, on aura

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m \varphi \, d\varphi = \frac{(m-1)(m-3)(m-5)\,..3.1}{m(m-2)\ldots\ldots4.2}\frac{\pi}{2},$$

et substituant dans la valeur de $s$, on retombera sur le résultat déjà trouvé.

413. Il est facile de trouver sur la figure l'angle $\varphi$ donné par l'équation

$$x = a \sin \varphi.$$

Or, si l'on décrit sur le grand axe de l'ellipse comme diamètre une circonférence (*fig.* 83, page 370) et que l'on joigne ON, on aura

$$\text{OP} = x = \text{ON} \cos \text{PON} = a \sin \text{CON};$$

par conséquent l'angle CON est l'angle $\varphi$.

## RECTIFICATION DE L'HYPERBOLE.

414. Dans le cas de l'*hyperbole*, représentée par l'équation

$$a^2 y^2 - b^2 x^2 = -a^2 b^2,$$

on a

$$ds = dx \sqrt{1 + \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2}} = dx \sqrt{\frac{(a^2 + b^2) x^2 - a^4}{a^2 (x^2 - a^2)}}.$$

Posons, pour simplifier,

$$\sqrt{a^2 + b^2} = ae,$$

$e$ représentant le rapport de la distance focale à l'axe transverse. Il viendra alors

$$ds = dx \sqrt{\frac{e^2 x^2 - a^2}{x^2 - a^2}}.$$

Changeons de variable, et, comme $x$ varie entre $a$ et l'infini, posons

$$x = \frac{a}{\cos \varphi},$$

$\varphi$ variant de o à $\frac{\pi}{2}$. On aura

$$dx = \frac{a \sin\varphi\, d\varphi}{\cos^2\varphi},$$

et, par suite,

$$ds = \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}\sqrt{a^2e^2 - a^2\cos^2\varphi} = \frac{aed\varphi}{\cos^2\varphi}\sqrt{1 - \frac{\cos^2\varphi}{e^2}}.$$

Donc

$$s = \text{arc AM} = \int_0^\varphi ae\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}\sqrt{1 - \frac{\cos^2\varphi}{e^2}}.$$

Pour obtenir cette intégrale, on développera le radical $\sqrt{1 - \frac{\cos^2\varphi}{e^2}}$ par la formule du binôme, et il viendra

$$s = ae\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}\left[\begin{array}{c} 1 - \frac{1}{2}\frac{\cos^2\varphi}{e^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\frac{\cos^4\varphi}{e^4} \\ + - \frac{1.1.3\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots 2n}\frac{\cos^{2n}\varphi}{e^{2n}} - \ldots \end{array}\right],$$

d'où l'on déduit

$$s = ae\,\text{tang}\varphi - \frac{1}{2}\frac{a}{e}\varphi - \frac{a}{e}\int_0^\varphi\left(\begin{array}{c} \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\frac{\cos^2\varphi}{e^2} \\ + \frac{1.1.3}{2.4.6}\frac{\cos^4\varphi}{e^4} + \ldots \end{array}\right).$$

Il reste à intégrer des expressions de la forme $\cos^m\varphi\, d\varphi$, $m$ étant pair. On y parviendra en changeant, dans la formule (2) du n° **211**, $\varphi$ en $\frac{\pi}{2} - \varphi$.

### RECTIFICATION DE LA CYCLOÏDE.

**415.** On a, en prenant les mêmes coordonnées que dans la leçon précédente (page 372),

$$dx = dy\sqrt{\frac{2a - y}{y}};$$

par suite,

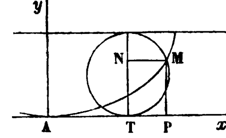
$$ds = dy\sqrt{\frac{2a-y}{y}+1} = dy\sqrt{\frac{2a}{y}} = 2\sqrt{2a}\,\frac{dy}{2\sqrt{y}}.$$

En intégrant cette formule entre les limites o et $y$, il vient

$$s = \text{arc AM} = 2\sqrt{2a}\int_0^y \frac{dy}{2\sqrt{y}} = 2\sqrt{2a}\,\sqrt{y}.$$

Menons, au point M, la tangente à la cycloïde, et limitons-la au point T où elle rencontre l'axe des $x$. Nous avons (n° 246)

*Fig.* 89.




$$\text{MT} = \sqrt{2ay};$$

par conséquent,

$$\text{arc MA} = 2\,\text{MT},$$

propriété déjà connue (n° 251).

Si l'on veut avoir la longueur de la demi-cycloïde, il faudra faire $y = 2a$, ce qui donnera $4a$ pour la longueur cherchée.

---

# TRENTE-CINQUIÈME LEÇON.

*Cubature des solides.* — Solides de révolution. — Application à divers exemples. — Volumes engendrés par la révolution d'une ellipse, d'une cycloïde. — Volumes qui s'obtiennent par une seule intégration. — Volumes terminés par des surfaces quelconques.

## CUBATURE DES SOLIDES DE RÉVOLUTION.

416. Soit V le volume engendré par la révolution de l'aire plane CAMP tournant autour de l'axe $Ox$. En donnant à $x$ un accroissement $\Delta x = PP'$, le volume V prendra un accroissement $\Delta V$ égal au volume engendré par $MM'PP'$.

Or, en supposant que $y$ croisse constamment dans l'intervalle $MM'$, $\Delta V$ sera compris entre les volumes des cylindres engendrés par la révolution des rectangles $MIPP'$, $KM'PP'$; nous aurons donc, en désignant par Y l'ordonnée $M'P'$,

*Fig.* 90.



$$\pi y^2 \Delta x < \Delta V < \pi Y^2 \Delta x,$$

ou bien

$$\pi y^2 < \frac{\Delta V}{\Delta x} < \pi Y^2.$$

Le rapport $\frac{\Delta V}{\Delta x}$ est donc compris entre deux quantités qui convergent l'une vers l'autre, à mesure que $\Delta x$ décroît; par conséquent on a, à la limite,

$$\frac{dV}{dx} = \pi y^2,$$

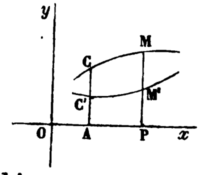
ou bien

$$V = \pi \int y^2 dx.$$

Il faudra donc tirer de l'équation de la courbe la valeur de $y$ en fonction de $x$, et intégrer entre des limites qui correspondent aux extrémités de l'arc générateur.

**417.** Le volume engendré par l'aire CMM′C′ est la différence des volumes engendrés par les aires CMPA et C′M′PA. Alors, en désignant MP par $y$ et M′P par $y'$, on a

Fig. 91.




$$V = \pi y^2\,dx - \pi \int y'^2\,dx,$$

ou bien

$$V = \pi \int (y^2 - y'^2)\,dx.$$

CUBATURE DE L'ELLIPSOÏDE DE RÉVOLUTION.

**418.** Soit V le volume engendré par la révolution d'une portion AMP d'ellipse tournant autour du grand axe. L'équation de l'ellipse rapportée à son axe et à la tangente au sommet, est

Fig. 92.

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2):$$

par suite,

$$(1) \qquad V = \frac{\pi b^2}{a^2}\int_0^x (2ax - x^2)\,dx = \frac{\pi b^2}{a^2}\left(ax^2 - \frac{x^3}{3}\right).$$

Si l'on fait $x = 2a$, on aura le volume de l'ellipsoïde entier, savoir

$$(2) \qquad V = \frac{\pi b^2}{a^2}\left(4a^3 - \frac{8a^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi b^2 a.$$

Pour obtenir le volume engendré par la demi-ellipse tournant autour du petit axe, il faudra changer $b$ en $a$ et $a$ en $b$, ce qui donnera $\frac{4}{3}\pi a^2 b$: on voit que ce volume est plus grand que le premier.

En faisant $b = a$ dans ces formules, on trouve $\frac{4}{3}\pi a^3$ pour le volume de la sphère, et $\frac{\pi x^2(3a-x)}{3}$ pour le volume d'un segment sphérique à une base.

VOLUME ENGENDRÉ PAR LA RÉVOLUTION D'UNE CYCLOÏDE.

419. Prenons pour axes la tangente au sommet et la normale en ce point. Considérons le solide engendré par le segment AMP tournant autour de l'axe $Ax$.

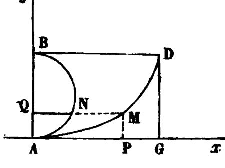


*Fig.* 93.

L'équation différentielle de la cycloïde étant (n° 401)

$$dx = dy\sqrt{\frac{2a-y}{y}} = \frac{dy}{y}\sqrt{2ay-y^2},$$

on aura

$$V = \pi\int_0^y ydy\sqrt{2ay-y^2},$$

ce qu'on peut écrire

$$V = \pi a\int_0^y dy\sqrt{2ay-y^2} - \pi\int_0^y (a-y)\,dy\sqrt{2ay-y^2}.$$

La première intégrale représente la surface du segment AQN (n° 401). Pour obtenir la seconde, posons $2ay-y^2 = z$, d'où $2(a-y)\,dy = dz$ : nous aurons

$$\int(a-y)\,dy\sqrt{2ay-y^2} = \int\sqrt{z}\frac{dz}{2} = \frac{1}{2}\int z^{\frac{1}{2}}\,dz = \frac{z^{\frac{3}{2}}}{3};$$

et, par suite,

$$V = \pi a \text{ segm AQN} - \frac{\pi}{3}(2ay-y^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Le volume engendré par AQM tournant autour de $Ax$,

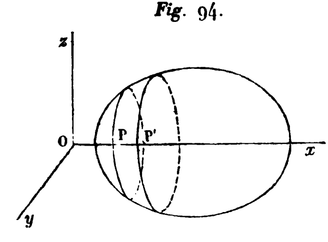
s'obtiendra en calculant la différence des volumes engendrés par le rectangle APMQ et la portion de surface AMQ.

### VOLUMES QUI PEUVENT S'OBTENIR PAR UNE SEULE INTÉGRATION.

**420.** On peut encore, par une seule intégration, obtenir le volume d'un corps lorsque l'aire de la section faite dans ce corps par un plan parallèle au plan $yOz$ est fonction de la distance de ces deux plans.

Supposons d'abord les axes rectangulaires : soient $u$ et $u+\Delta u$ les sections faites dans le corps par deux plans P et P', parallèles au plan $yOz$, et dont les distances à ce dernier sont respectivement $x$ et $x+\Delta x$. L'accroissement $\Delta V$ du volume correspondant à l'accroissement $\Delta x$ de l'abscisse, sera compris entre les cylindres droits qui auraient pour bases respectivement $u$ et $u+\Delta u$, et $\Delta x$ pour hauteur; c'est-à-dire que l'on a, en supposant $\Delta u$ positif,

*Fig.* 94.




$$u\Delta x < \Delta V < (u+\Delta u)\Delta x,$$

d'où

$$u < \frac{\Delta V}{\Delta x} < u + \Delta u.$$

Or, à la limite, $\Delta u$ est nul; on a donc

$$\frac{dV}{dx} = u, \quad \text{ou} \quad dV = udx.$$

Cette démonstration suppose que les deux cylindres ne se coupent pas. Si ces deux cylindres se coupent, ils ont une partie commune qui a pour base $u-\alpha$, $\alpha$ étant une quantité très-petite, et qui s'évanouit en même temps que $\Delta x$. De même, cette partie commune augmentée des par-

ties excédantes de part et d'autre, forme un cylindre qui a pour base $u+\beta$, $\beta$ s'évanouissant avec $\Delta x$. Or $\Delta V$ est évidemment compris entre ces deux quantités : par suite

$$u-\alpha<\frac{\Delta V}{\Delta x}<u+\beta,$$

et en passant à la limite,

$$\frac{dV}{dx}=u, \quad \text{ou} \quad dV=udx.$$

Le volume compris entre deux plans parallèles à $yOz$ menés à des distances $a$ et $b$, s'obtiendra donc par la formule

$$V=\int_a^b udx.$$

Pour obtenir le volume du corps entier, il faudra mener des plans tangents parallèles à $yOz$, et prendre pour limites de l'intégration les distances de ces plans au plan $yOz$.

**421.** Supposons maintenant que l'axe $Ox$ ne soit plus perpendiculaire au plan des sections. En comparant le volume compris entre deux plans parallèles à $yOz$ et la surface, avec un cylindre oblique qui a pour base $u$ et pour hauteur la distance des deux plans représentée par $dx\sin\lambda$, $\lambda$ étant l'angle que font les plans de section avec l'axe $Ox$, on a alors

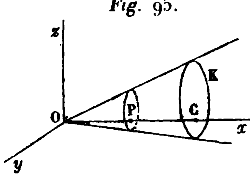
$$dV=udx\sin\lambda, \quad \text{d'où} \quad V=\sin\lambda\int udx.$$

On pourrait facilement démontrer cette formule avec la même rigueur que la précédente, mais nous croyons inutile de nous y arrêter.

**422.** Soit, par exemple, un *cône à base quelconque :* prenons pour axe des $x$ la perpendiculaire OC, abaissée du sommet sur la base, et pour plan des $yz$ un plan mené par

le sommet parallèlement au plan de la base; appelons $h$ la hauteur du cône et $b$ sa base. En menant à une distance $OP = x$ un plan parallèle à $yOz$, l'aire de la section sera, d'après un théorème connu, $u = \frac{bx^2}{h^2}$. Donc

Fig. 95.




$$V = \int_0^x \frac{bx^2\,dx}{h^2} = \frac{bx^3}{3h^2},$$

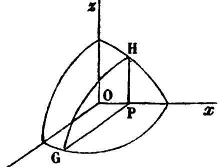
et en faisant $x = h$, on a, pour le volume du cône $\frac{bh}{3}$.

**423**. Soit encore un *ellipsoïde rapporté à ses axes principaux*,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

La section GPH faite dans l'ellipsoïde par un plan parallèle au plan $yOz$, mené à la distance $OP = x$, a pour équation

Fig. 96.




$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}.$$

On aura, pour ses demi-axes, en faisant successivement $z = 0$, $y = 0$,

$$GP = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \quad PH = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

De sorte que l'aire de la section est

$$\pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = \frac{\pi bc}{a^2}(a^2 - x^2),$$

d'où l'on déduit, pour le volume V du segment compris entre les plans $yOz$ et GPH,

$$V = \frac{\pi bc}{a^2}\int_0^x dx\,(a^2 - x^2) = \frac{\pi bc}{a^2}\left(a^2 x - \frac{x^3}{3}\right).$$

Pour obtenir le volume de la moitié de l'ellipsoïde, on fait, dans la formule précédente, $x = a$, et il vient

$$V = \frac{\pi bc}{a^2}\left(a^3 - \frac{a^3}{3}\right) = \frac{2}{3}\pi abc.$$

Le volume entier de l'ellipsoïde sera donc exprimé par $\frac{4}{3}\pi abc$.

**424.** Considérons maintenant un *ellipsoïde rapporté à trois diamètres conjugués obliques*. Son équation est de la forme

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2} = 1.$$

La section faite par un plan parallèle à $yOz$, à une distance égale à $x$, est une ellipse ayant pour équation

$$\frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2} = \frac{a'^2 - x^2}{a'^2};$$

et les demi-diamètres conjugués auxquels elle est rapportée, ont pour longueurs

$$\frac{b'}{a'}\sqrt{a'^2 - x^2}, \quad \frac{c'}{a'}\sqrt{a'^2 - x^2};$$

donc en désignant par $\theta$ l'angle que font entre eux ces diamètres, on aura pour la surface de la section considérée

$$u = \frac{\pi b' c'}{a'^2}(a'^2 - x^2)\sin\theta.$$

Par suite, on aura, pour le volume du segment d'ellipsoïde,

$$V = \frac{\pi b' c' \sin\theta \sin\lambda}{a'^2}\int_0^x (a'^2 - x^2)\,dx$$

$$= \frac{\pi b' c' \sin\theta \sin\lambda}{a'^2}\left(a'^2 x - \frac{x^3}{3}\right),$$

et pour l'ellipsoïde entier

$$\frac{4}{3}\pi a' b' c' \sin\theta \sin\lambda.$$

**425.** En comparant cette expression du volume de l'ellipsoïde à celle qu'on a obtenue précédemment, on trouve

$$a' b' c' \sin\theta \sin\lambda = abc,$$

équation qui démontre que tous les parallélipipèdes construits sur les diamètres conjugués d'un ellipsoïde sont équivalents au rectangle construit sur les axes. On en déduit aussi

$$\pi abc = \pi a' b' c' \sin\theta \sin\lambda,$$

c'est-à-dire que tous les cylindres circonscrits à l'ellipsoïde et dont les bases sont parallèles aux plans des courbes de contacts sont équivalents entre eux.

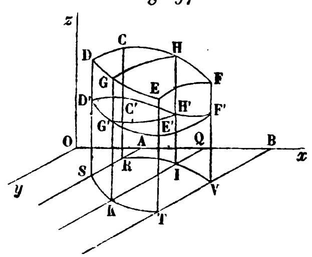
### VOLUMES TERMINÉS PAR DIVERSES SURFACES.

**426.** Imaginons maintenant une surface quelconque CDEF dont l'équation soit

$$F(x, y, z) = 0.$$

Supposons que deux plans parallèles à $yOz$, menés aux distances $OA = a$, $OB = b$, coupent la surface suivant les courbes CD et EF. Imaginons encore deux cylindres droits

*Fig.* 97.




$$y = \varphi(x), \quad y_1 = \psi(x),$$

qui aient pour base, sur le plan $yOx$, les courbes RV et ST et coupant la surface suivant les courbes CF et DE. On pourrait se proposer de trouver le volume DCFERVTS, mais il vaut mieux rendre la question plus générale en

considérant une seconde surface D′G′E′F′, dont l'équation est

$$F_1(x, y, z) = 0,$$

et chercher le volume CDEFC′D′E′F′.

Pour cela, menons à une distance arbitraire $x = OQ$, comprise entre $a$ et $b$, un plan parallèle à $yOz$, et déterminons l'aire de la section GHH′G′. Or cette aire plane est comprise entre deux courbes dont les équations

$$(1) \qquad z = f(x, y), \quad z_1 = f_1(x, y),$$

s'obtiennent en faisant, dans celles des deux surfaces, la variable $x$ égale à la constante OQ. Elle aura, par conséquent, pour différentielle $(z - z_1)\,dy$, $z$ et $z_1$ étant, d'après les équations (1), des fonctions de $y$ correspondantes à une même valeur de cette variable. On aura donc, en intégrant entre les limites $y$ et $y_1$,

$$\text{aire GHG'H'} = \int_y^{y_1} (z - z_1)\,dy.$$

Ainsi $z - z_1$ étant une fonction de $y$ dans laquelle $x$ entre comme constante, on trouvera pour l'intégrale indéfinie

$$\int (z - z_1)\,dy = \pi(x, y) + C.$$

On fera, dans cette fonction, $y = \varphi(x)$ et $y = \psi(x)$ successivement, $x$ étant regardée comme constante, d'où on déduira

$$\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} (z - z_1)\,dy = \text{aire GHH'G'} = \pi[x, \psi(x)] - \pi[x, \varphi(x)],$$

résultat qui ne dépend que de $x$.

En regardant de nouveau $x$ comme variable, on aura

pour le volume demandé,

$$\int_a^b \left\{\pi[x, \psi, (x)] - \pi[x, \varphi, (x)]\right\} dx = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} (z - z_1)\, dy.$$

**427.** Lorsque les deux surfaces cylindriques se réduisent à des plans parallèles à $zOy$, $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ ne sont plus que des constantes $c$ et $e$, indépendantes de la valeur OQ de $x$, et la formule se réduit à

$$\int_a^b dx \int_c^e (z - z_1)\, dy.$$

**428.** Si la surface inférieure se confond avec le plan $xy$, on aura $z_1 = 0$, et l'expression précédente devient

$$\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} z\, dy,$$

ce qui donne le volume compris entre une surface quelconque, le plan $xy$, deux cylindres parallèles à l'axe des $z$ et deux plans parallèles au plan $zOy$.

**429.** Ce qui précède peut servir à déterminer le volume d'un corps quelconque terminé de tous côtés par une surface dont l'équation $F(x, y, z) = 0$ est connue.

Imaginons un cylindre circonscrit à la surface, parallèlement à l'axe des $z$; comme en chaque point $(x, y, z)$ de la courbe de contact, le plan tangent

$$\frac{dF}{dx}(X - x) + \frac{dF}{dy}(Y - y) + \frac{dF}{dz}(Z - z) = 0$$

est vertical, on a

$$\frac{dF(x, y, z)}{dz} = 0.$$

L'élimination de $z$, entre cette équation et celle de la surface, donne une équation

$$\psi(x, y) = 0,$$

qui représente la trace du cylindre sur le plan $y O x$. Cette

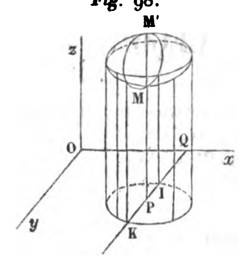


*Fig.* 98.

courbe est, par hypothèse, une courbe fermée, et en la coupant par un plan parallèle à $y O z$, on aura deux ordonnées $y = \varphi(x)$ et $y_1 = \varphi_1(x)$ représentées sur la figure par QI, QK, et analogues aux lignes de même nom dans la question précédente.

De même, ce plan sécant déterminera dans la surface une courbe fermée, et si $z = MP$, $z_1 = M'P$ sont les deux valeurs de $z$ correspondant à la valeur $y = PQ$, l'aire de cette section sera exprimée par

$$\int_{y}^{y_1} (z - z_1)\, dy.$$

Si maintenant on désigne par $a$ et $b$ les distances du plan $y O z$ aux plans tangents à la surface, qui lui sont parallèles, on aura pour le volume du corps

$$\int_a^b dx \int_{y}^{y_1} (z - z_1)\, dy.$$

---

# TRENTE-SIXIÈME LEÇON.

**Intégrales doubles. — Intégrales triples. — Théorème sur l'ordre des intégrations. — Quadrature des surfaces courbes. — Aire des surfaces de révolution. — Application à la sphère, à l'ellipsoïde.**

---

### DES INTÉGRALES DOUBLES.

**430.** Toute expression où il entre deux intégrales relatives à des variables différentes, comme celles que nous avons obtenues à la fin de la dernière leçon, est ce que l'on appelle une *intégrale double*.

Une intégrale double est *définie* lorsqu'on assigne les limites des deux intégrations. Elle est *indéfinie* dans le cas contraire, et on la représente alors simplement par $\int\int z\,dx\,dy$.

**431.** Une intégrale double $\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} z\,dy$ est la limite de la somme de tous les produits de la forme $z\,\Delta x\,\Delta y$ entre les limites des deux intégrations.

En effet, $\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} z\,dy$ étant l'intégrale définie de $z\,dy$ prise entre les limites $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ de $y$, $x$ étant regardée comme constante, on a, d'après un théorème démontré (n° 375),

$$\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} z\,dy = \lim \sum z\,\Delta y.$$

Par conséquent, en multipliant par $\Delta x$ et faisant varier $x$ depuis $x = a$ jusqu'à $x = b$, il vient

$$\sum \Delta x \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} z\,dy = \sum \Delta x \lim \sum z\,\Delta y.$$

Or, si les valeurs de $x$ se rapprochent de plus en plus, on a

$$\lim \sum \Delta x \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} z dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} z dy\,;$$

d'un autre côté, $x$ étant regardée comme constante, dans $\sum z\,\Delta y$, on a

$$\lim \sum \Delta x \lim \sum z \Delta y = \lim \sum \lim \sum z \Delta y\, \Delta x,$$

ou bien

$$\lim \sum \Delta x \lim \sum z \Delta y = \lim \sum \sum \Delta y\, \Delta x.$$

Donc enfin on a

$$\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} z dy = \lim \sum \sum z\, \Delta y\, \Delta z,$$

ce qu'il fallait démontrer.

432. On peut d'ailleurs démontrer ce théorème par des considérations géométriques. Soit

$$z = \mathrm{F}(x, y)$$

l'équation d'une surface : l'intégrale double

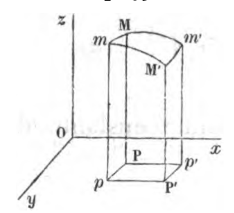
$$\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} z dy$$

représente, comme on l'a vu au n° 428, le volume V compris entre cette surface, le plan $xy$, deux cylindres parallèles à l'axe des $z$ et deux plans parallèles au plan $zOy$.

Soient M et M′ deux points voisins quelconques sur la surface. Construisons le rectangle $\mathrm{P}p'$ dont les côtés parallèles aux axes $Ox$ et $Oy$ soient conduits par les points P et P′, pieds des parallèles à l'axe des $z$ menées

par M et M'. Les plans $MPp$, $mpP'$, $M'P'p'$ et $m'p'P$ coupent la surface suivant un quadrilatère courbe MM' : le volume V est la somme des solides analogues à MP', terminés aux limites convenables. Soit $MP = z$ et soient $z - \alpha$ la plus petite, et $z + \beta$ la plus grande distance des points de la surface au plan $xy$ dans toute l'étendue du quadrilatère courbe $MmM'm'$.

*Fig.* 99.




Le volume MP', que nous désignerons par $\Delta V$, est compris entre les deux parallélipipèdes rectangles ayant pour base commune $Pp'$ et pour hauteur $z - \alpha$ et $z + \beta$ ; comme d'ailleurs le rectangle $Pp' = \Delta x \Delta y$, on aura

$$(z-\alpha)\,\Delta x\,\Delta y < \Delta V < (z-\beta)\,\Delta x\,\Delta y,$$

ou

$$(z-\alpha) < \frac{\Delta V}{\Delta x\,\Delta y} < (z+\beta).$$

Mais $\alpha$ et $\beta$ s'annulant avec $\Delta x$ et $\Delta y$, on a

$$\lim \frac{\Delta V}{\Delta x\,\Delta y} = z.$$

Par conséquent

$$\Delta V = z\,\Delta x\,\Delta y\,(1+\eta),$$

$\eta$ devenant nul en même temps que $\Delta x$ et $\Delta y$.

Pour chaque valeur de $\Delta x$, on a une infinité de valeurs de $\Delta y$ qui produisent dans le solide une tranche, dont le volume sera représenté par

$$\sum z\,\Delta x\,\Delta y\,(1+\eta).$$

Puis en faisant varier $x$, c'est-à-dire en prenant les autres valeurs de $\Delta x$, on a une suite de tranches dont la somme donne, quand on passe à la limite, le volume V, et par

conséquent,

$$V = \lim \sum\sum z\Delta x\,\Delta y\,(1+\eta).$$

Mais

$$\sum\sum z\Delta x\,\Delta y\,(1+\eta) = \sum\sum z\Delta x\,\Delta y + \sum\sum \eta z\Delta x\,\Delta y.$$

Or

$$\sum\sum \eta z\,\Delta x\,\Delta y = 0.$$

En effet, en supposant tous les points M, M′, etc., assez rapprochés les uns des autres, on pourra toujours faire en sorte que pour chacun d'eux on ait $\eta < \varepsilon$, $\varepsilon$ étant une constante arbitraire que l'on peut supposer aussi petite que l'on veut. Par conséquent

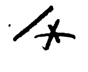
$$\sum\sum \eta z\Delta x\,\Delta y < \sum\sum \varepsilon z\Delta x\,\Delta y, \quad \text{ou} \quad < \varepsilon \sum\sum z\Delta x\,\Delta y.$$

Or cette dernière quantité est nulle à la limite, puisque $\varepsilon$ peut être pris aussi petit que l'on veut, et que d'ailleurs $\sum\sum z\,\Delta x\,\Delta y$ a une valeur finie. Donc enfin

$$V \text{ ou } \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} z dy = \lim \sum\sum z\Delta x\,\Delta y.$$

INTÉGRALES TRIPLES.

433. Soit $U = f(x, y, z)$ une fonction de trois variables indépendantes $x, y, z$.



Si l'on intègre la différentielle $f(x, y, z)\,dz$ par rapport à $z$, c'est-à-dire en regardant $x$ et $y$ comme des constantes, et si l'on fait varier $z$ entre deux limites représentées par deux fonctions de $x$ et de $y$, savoir $\mathrm{f}(x, y)$ et $\mathrm{F}(x, y)$, on aura l'intégrale

$$\int_{\mathrm{f}(x,y)}^{\mathrm{F}(x,y)} f(x, y, z)\,dz,$$

qui sera une fonction de $x$ et de $y$.

see Vol. 11. p 31.

Considérons maintenant $x$ comme constante dans la fonction

$$dy \int_{f(x,y)}^{F(x,y)} f(x, y, z)\, dz.$$

Intégrons cette fonction par rapport à $y$ en faisant varier $y$ entre deux limites représentées par $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ : on aura l'intégrale

$$\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy \int_{f(x,y)}^{F(x,y)} f(x, y, z)\, dz,$$

qui sera une fonction de $x$.

Enfin, si l'on intègre la différentielle

$$dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy \int_{f(x,y)}^{F(x,y)} f(x, y, z)\, dz,$$

par rapport à $x$, en faisant varier $x$ entre deux limites quelconques $a$ et $b$, on aura pour résultat

$$\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy \int_{f(x,y)}^{F(x,y)} f(x, y, z)\, dz,$$

cette expression se nomme *intégrale triple;* on la représente aussi par

$$\int\int\int f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

On concevra de même une intégrale d'un ordre quelconque.

On démontrera encore, dans le cas de l'intégrale triple, que

$$\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy \int_{f(x,y)}^{F(x,y)} f(x, y, z)\, dz$$

$$= \lim \sum\sum\sum f(x, y, z)\, \Delta x\, \Delta y\, \Delta z.$$

La démonstration étant tout à fait semblable à celle que

nous avons donnée pour une intégrale double, nous nous dispenserons de la répéter ici.

### THÉORÈME SUR L'ORDRE DES INTÉGRATIONS.

434. Nous avons obtenu, précédemment, pour l'expression du volume compris entre deux surfaces, deux cylindres parallèles à l'axe $Oz$, et deux plans parallèles au plan des $(y, z)$ :

$$\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} (z - z')\, dy.$$

Ici l'ordre des intégrations n'est pas indifférent. Ainsi, l'on n'obtiendrait pas, en général, le résultat cherché par la formule

$$\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy \int_a^b (z - z')\, dx.$$

Toutefois, si $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont des constantes $a'$ et $b'$, c'est-à-dire si les deux cylindres parallèles à l'axe des $z$ se réduisent à deux plans, il sera indifférent de commencer par l'une quelconque des deux intégrations; car, en répétant les raisonnements du n° 426, on voit que le volume en question a tout à la fois pour mesure l'une quelconque des expressions

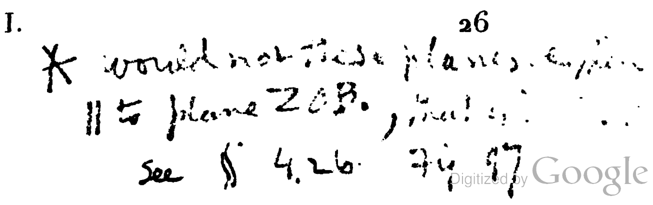
$$\int_a^b dx \int_{a'}^{b'} (z - z')\, dy \quad \text{ou} \quad \int_{a'}^{b'} dy \int_a^b (z - z')\, dx.$$

### DE L'AIRE DES SURFACES COURBES.

435. On appelle aire d'une surface courbe, terminée à un contour quelconque, la limite vers laquelle tend l'aire d'une surface polyédrique composée de faces planes, qui, en diminuant toutes indéfiniment, tendent à devenir tangentes à la surface considérée. On suppose d'ailleurs que le contour qui termine la surface polyédrique se rapproche indéfiniment de celui qui limite la surface courbe.

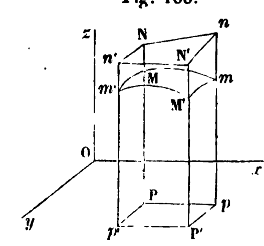
Nous allons d'abord démontrer l'existence de cette limite.





Prenons sur la surface deux points M $(x, y, z)$, et M' $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$. Soient P et P' leurs projections sur le plan $xOy$. Formons le rectangle $P'p' = \Delta x \Delta y$ dont les côtés soient parallèles à $Ox$ et à $Oy$, et concevons un prisme indéfini ayant pour base ce rectangle, et dont les arêtes soient perpendiculaires au plan des $(x, y)$. Ce prisme intercepte sur la surface donnée un quadrilatère curviligne MM', et sur la surface polyédrique une aire $\omega$ qui, si elle n'est pas plane, sera composée de parties planes $a$, $a'$, $a''$, etc.

*Fig.* 100.




Or, puisque les plans de toutes ces surfaces tendent indéfiniment à se confondre avec le plan tangent en M à la surface, si $\theta$, $\theta'$, $\theta''$, etc., sont les angles formés par les plans des éléments $a$, $a'$, $a''$, etc., avec le plan des $(x, y)$, et si $\lambda$ est l'angle que forme ce dernier plan avec le plan tangent en M, on a

$$\cos\theta = \cos\lambda\,(1 + \alpha), \quad \cos\theta' = \cos\lambda\,(1 + \alpha'), \ldots,$$

$\alpha$, $\alpha'$, etc., tendant indéfiniment vers zéro en même temps que $\Delta x$ et $\Delta y$. Mais le rectangle PP' est la somme des projections de tous les triangles dont nous parlons. Donc

$$\Delta x \Delta y = a\cos\lambda\,(1 + \alpha) + a'\cos\lambda\,(1 + \alpha') + a''\cos\lambda\,(1 + \alpha'') + \ldots,$$

ou

$$\frac{\Delta x\,\Delta y}{\cos\lambda} = a + a' + a'' + \ldots + (a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \ldots),$$

ou, comme $a + a' + a'' + \ldots = \omega$,

$$\frac{\Delta x\,\Delta y}{\cos\lambda} = \omega + (a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \ldots).$$

En opérant de la même manière dans toute l'étendue de la surface, on aura un certain nombre d'équations ana-

logues à celle-ci, et en les ajoutant membre à membre, on aura

$$\sum \frac{\Delta x\,\Delta y}{\cos\lambda} = \sum \omega + \sum (a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \ldots).$$

Donc

$$\lim \sum \frac{\Delta x\,\Delta y}{\cos\lambda} = \lim \sum \omega + \lim \sum (a\alpha + a'x' + a''\alpha'' + \ldots).$$

Or

$$\lim \sum (a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \ldots) = 0,$$

d'après le théorème démontré n° 169 : donc

$$\lim \sum \omega = \lim \sum \frac{\Delta x\,\Delta y}{\cos\lambda} = \int\int \frac{dx\,dy}{\cos\lambda}.$$

On voit par là que $\sum \omega$ ou la surface polyédrique a une limite.

436. Ainsi, en appelant A l'aire de la surface, on a

$$A = \int\int \frac{dx\,dy}{\cos\lambda}.$$

Si $p$ et $q$ sont les dérivées partielles $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ tirées de l'équation de la surface, on a

$$\cos\lambda = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

et il vient

$$A = \int\int \sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy.$$

Si la surface est limitée aux plans $x = a$, $x = b$ et aux cylindres $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$, on aura

$$A = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \sqrt{1+p^2+q^2}\,dy;$$

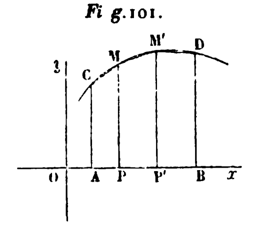
la marche par laquelle on parvient à ces limites est la même que celle que nous avons déjà suivie dans une autre question (n° 427).

### AIRE DES SURFACES DE RÉVOLUTION.

**437.** L'aire d'une surface de révolution peut s'obtenir par une seule intégration.

Soit CMD une courbe plane qui, par sa révolution autour de l'axe $Ox$, situé dans son plan, engendre la surface dont on veut avoir l'aire. Soit CMM′D un contour polygonal inscrit dans cette courbe. On peut considérer l'aire de la surface comme la limite vers laquelle tend la somme des surfaces des troncs de cônes engendrés par le contour polygonal, lorsque ses côtés décroissent indéfiniment, en même temps que leur nombre augmente jusqu'à l'infini.

Fig. 101.




Soient donc

$$M(x, y) \quad \text{et} \quad M'(x+\Delta x, y+\Delta y),$$

deux sommets consécutifs du contour polygonal. La surface décrite par la révolution de MM′ a pour mesure

$$\frac{1}{2} MM' (\operatorname{circ} MP + \operatorname{circ} M'P')$$

ou

$$\pi(2y+\Delta y)\Delta x\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}.$$

Mais comme

$$\lim (2y+\Delta y)\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} = 2y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

il s'ensuit que l'expression de la surface du tronc de cône sera

$$2\pi y\left(\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}+\alpha\right)\Delta x,$$

$\alpha$ désignant une quantité qui s'annule avec $\Delta x$, et, par suite, la surface décrite par le contour polygonal aura

pour mesure

$$\sum 2\pi y\left[\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}+\alpha\right]\Delta x.$$

En désignant par A la surface cherchée, on aura donc

$$A = \lim\sum 2\pi y\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}\Delta x + 2\pi y \lim\sum \alpha\Delta x.$$

Mais $\lim\sum\alpha\Delta x = 0$ (n° 169), et

$$\lim\sum 2\pi y\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}\Delta x = \int_a^b 2\pi y dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2};$$

donc

$$A = \int_a^b 2\pi y dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

*a* et *b* étant les abscisses des extrémités de l'arc CD.

En désignant par *s* un arc compté à partir d'un point fixe, on a

$$ds = dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

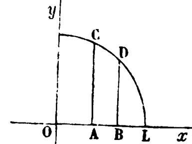
Donc

$$A = 2\pi\int_a^x y ds.$$

SURFACE DE LA ZONE.

**438.** Comme application cherchons la mesure de la zone engendrée par la révolution de l'arc de cercle CD autour du diamètre OL. Soit

Fig. 102.




$$x^2 + y^2 = R^2$$

l'équation du cercle. A étant la surface de la zone, si $OA = a$, et $OB = b$, on aura

$$A = \int_a^b 2\pi y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$$

$$= \int_a^b 2\pi y\sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}dx = \int_a^b 2\pi R\, dx,$$

donc enfin

$$A = 2\pi R(b - a) = 2\pi R \times AB,$$

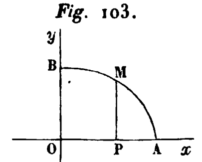
résultat connu.

Si l'on veut avoir la surface de la sphère entière, il faudra intégrer depuis $x = -R$ jusqu'à $x = R$, ce qui donnera l'expression connue $4\pi R^2$.

SURFACE DE L'ELLIPSOÏDE DE RÉVOLUTION.

439. Comme second exemple, soit l'ellipse OAB. Supposons qu'elle tourne autour d'un de ses axes OA, et cherchons à évaluer la surface engendrée par la révolution de l'arc BM, qui commence à l'extrémité B de l'autre axe. On aura

*Fig.* 103.




$$A = 2\pi \int_0^x y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx.$$

Or l'équation de l'ellipse, $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$, donne

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y},$$

d'où

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{\sqrt{a^4y^2 + b^4x^2}}{a^2y}.$$

Remplaçant dans cette expression $a^2y^2$ par $a^2b^2 - b^2x^2$, il vient

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{b\sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}}{a^2y}.$$

Supposons d'abord que l'on ait $a > b$, c'est-à-dire que l'ellipse ait tourné autour de son grand axe. Posons $\sqrt{a^2 - b^2} = ae$. Il vient alors

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{b\sqrt{a^4 - a^2e^2x^2}}{a^2y} = \frac{b\sqrt{a^2 - e^2x^2}}{ay};$$

par conséquent,

$$A = 2\pi \frac{b}{a} \int_0^x \sqrt{a^2 - e^2 x^2}\, dx$$

$$= \frac{2\pi be}{a} \int_0^x \sqrt{\frac{a^2}{e^2} - x^2}\, dx.$$

Or (n° 398)

$$2\int_0^x \sqrt{\frac{a^2}{e^2} - x^2} = x\sqrt{\frac{a^2}{e^2} - x^2} + \frac{a^2}{e^2} \operatorname{arc\,sin} \frac{ex}{a};$$

donc

$$A = \frac{\pi be}{a}\left(x\sqrt{\frac{a^2}{e^2} - x^2} + \frac{a^2}{e^2} \operatorname{arc\,sin} \frac{ex}{a}\right).$$

**440.** Si l'on fait dans cette expression $x = a$, et si l'on prend le double du résultat, il vient

$$2\pi b^2 + \frac{2\pi ba}{e} \operatorname{arc\,sin} e$$

pour la surface totale de l'ellipsoïde.

Si $e = 0$, l'ellipsoïde devient une sphère, et en remarquant que $\lim \frac{\operatorname{arc\,sin} e}{e} = 1$ pour $e = 0$, on retrouve $4\pi a^2$ pour la surface de la sphère.

**441.** Soient maintenant $a < b$ et $\sqrt{b^2 - a^2} = be$ : on aura

$$A = 2\pi \int_0^x y dx \frac{b\sqrt{a^4 + (b^2 - a^2)x^2}}{a^2 y}$$

$$= \frac{2\pi b}{a^2} \int_0^x dx \sqrt{a^4 + b^2 e^2 x^2}$$

$$= \frac{2\pi b^2 e}{a^2} \int_0^x dx \sqrt{\frac{a^4}{b^2 e^2} + x^2}.$$

Or

$$\int dx \sqrt{x^2 + c} = \frac{x\sqrt{x^2 + c}}{2} + \frac{c}{2} \,\mathrm{l}\left(x + \sqrt{x^2 + c}\right) + C;$$

donc

$$A = \frac{\pi b^2 e}{a^2}\left[x\sqrt{\frac{a^4}{b^2 e^2} + x^2} + \mathrm{l}\left(x + \sqrt{\frac{a^4}{b^2 e^2} + x^2}\right)\right] + C.$$

Comme cette intégrale doit être nulle pour $x = 0$, on aura $C = -1\frac{a^2}{be}$, et, par suite,

$$A = \frac{\pi b^2 e}{a^2}\left[x\sqrt{\frac{a^4}{b^2 e^2} + x^2} + \frac{a^4}{b^2 e^2}\,1\left(\frac{x + \sqrt{\frac{a^4}{b^2 e^2} + x^2}}{\frac{a^2}{b^2}}\right)\right].$$

Si l'on fait $x = a$, on aura en doublant

$$2\pi b^2\sqrt{a^2 + b^2 e^2} + \frac{2\pi a^2}{e}\,1\left(\frac{be^2 + \sqrt{a^2 + b^2 e^2}}{a}\right),$$

pour la surface totale de l'ellipsoïde.

**442.** Si l'on suppose $e = 0$, on voit, en développant

$$\sqrt{a^2 + b^2 e^2} = a\left(1 + \frac{b^2 e^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

par la formule du binôme, que

$$\lim \frac{\log\frac{(be + \sqrt{a^2 + b^2 e^2})}{a}}{e} = 1.$$

On retrouve ainsi $4\pi a^2$ pour la surface de la sphère.

FIN DU PREMIER VOLUME.

# ERRATA.

Page 3, ligne 11, *au lieu de* exprimées, *lisez* exprimées analytiquement.

Page 8, ligne 22, *au lieu de* $\lim \frac{k}{k}$, *lisez* $\lim \frac{k}{h}$.

Page 91, ligne 6, *au lieu de* pour toutes les autres valeurs, *lisez* pour toutes les valeurs.

Page 208, ligne 14, *au lieu de* $\frac{dy^2}{dx}$, *lisez* $\frac{dy^2}{dx^2}$.

Page 251, ligne 2, *au lieu de* tangente, *lisez* tangente MT.

Page 300, ligne 11, *au lieu de* $\frac{1}{2a} \mathrm{l} \left( c \frac{x-a}{x+a} \right)$,

*lisez* $\frac{1}{2a} \mathrm{l} \left( c \frac{x+a}{x-a} \right)$.

$C_1$ $C_2$ $C_3$ determine $\alpha$

$y = f(x, \alpha)$

